

第四节 矩阵的逆

主要内容

- 问题的提出
- 逆矩阵的定义
- 矩阵可逆的条件
- 可逆矩阵的性质
- 克拉默法则的另一证法
- 矩阵乘积的秩的性质

一、问题的提出

1. 数的运算规则有哪些？矩阵的运算有哪些？
2. 形如 $AX=B$ ，其中 A ， B 都是 n 级方阵，若 A 是非退化的，怎么解该方程？

二、逆矩阵的定义

1. 可逆的定义

定义 7 n 级方阵 A 称为**可逆的**，如果有 n 级方阵 B ，使得

$$AB = BA = E, \quad (1)$$

这里 E 是 n 级单位矩阵。

定义 8 如果矩阵 B 适合 (1)，那么就称为 A 的**逆矩阵**，记为 A^{-1} 。

2. 逆矩阵的唯一性

若方阵 A 可逆, 则其逆矩阵唯一.

证明 设 B 和 C 都是 A 的逆矩阵, 则由定义

有
$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

于是

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

所以逆矩阵唯一.

证毕

三、矩阵可逆的条件

现在的问题是：在什么条件下矩阵 A 是可逆的？

如果 A 可逆，怎样求 A^{-1} ？

1. 伴随矩阵

定义 9

设 A_{ij} 是矩阵 $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式，矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{称为 } A \text{ 的伴随矩阵.}$$

问：A 的伴随矩阵 A^* 与矩阵 A 的积 $A^*A = ?$

矩阵 A 与 A 的伴随矩阵 A^* 的积 $AA^* = ?$

由行列式按一行(列)展开的公式立即得出:

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix} = dE \quad (2)$$

其中 $d = |A|$.

如果 $d = |A| \neq 0$, 那么由 (2) 得

$$A\left(\frac{1}{d}A^*\right) = \left(\frac{1}{d}A^*\right)A = E. \quad (3)$$



文山學院

WENSHAN UNIVERSITY

2. 矩阵可逆的充分必要条件

定理 3 矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 非退化, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^* \quad (d = |A| \neq 0).$$

证明 当 $d = |A| \neq 0$, 由 (3) 可知, A 可逆

且

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^*. \quad (4)$$

反过来，如果 A 可逆，那么有 A^{-1} 使

$$AA^{-1} = E.$$

两边取行列式，得

$$|AA^{-1}| = |A| |A^{-1}| = |E| = 1,$$

因而 $|A| \neq 0$ ，即 A 非退化。

证毕

定理3不但给出了一矩阵可逆的条件，同时也给出了求逆矩阵的公式(4)，用公式(4)求逆矩阵的方法叫**伴随矩阵法**。

下面利用伴随矩阵法求逆阵。

例 1 用伴随矩阵法求下列矩阵的逆阵

$$(1) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

四、可逆矩阵的性质

设 $A, B, A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为 n 级可逆方阵,

k 为非零常数, 则

$$A^{-1}, kA, AB, A_1A_2 \dots A_m, A^T$$

也都是可逆矩阵, 且

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$(2) (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

$$(3) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$(A_1A_2 \dots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1};$$

$$(4) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

$$(5) \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|};$$

$$(6) \quad (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m, m \text{ 为正整数.}$$

证明 只证 (3) 和 (4) .

$$(3) \quad (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

$$(4) \quad A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (E)^T = E,$$

所以 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

证毕

五、克拉默法则的另一证法

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

可以写成

$$AX = B. \quad (6)$$

如果 $|A| \neq 0$, 那么 A 可逆. 用 $X = A^{-1}B$ 代入 (6),

得恒等式 $A(A^{-1}B) = B$, 这就是说 $A^{-1}B$ 是一解.

如果 $X = C$ 是 (6) 的一个解, 那么由 $AC = B$ 得

$$A^{-1}(AC) = A^{-1}B,$$

即 $C = A^{-1}B.$

这就是说, 解 $X = A^{-1}B$ 是唯一的. 用 A^{-1} 的公式 (4)

代入方程的解 $A^{-1}B$ 就是克拉默法则中给出的公式.

六、矩阵乘积的秩的性质

定理4 A 是一个 $s \times n$ 矩阵, 若 P 是

$s \times s$ 可逆矩阵, 注意的一个非奇异阵, 则

一个可逆矩阵它的秩会不会改变?
 $\text{秩}(A) = \text{秩}(PA) = \text{秩}(AQ)$.

证明 令 $B = PA$, 则 $A = P^{-1}B$.

由定理2得: $\text{秩}(B) = \text{秩}(PA) \leq \text{秩}(A)$;

$\text{秩}(A) = \text{秩}(P^{-1}B) \leq \text{秩}(B)$.

所以 $\text{秩}(A) = \text{秩}(B) = \text{秩}(PA)$.

另一个式子可以同样地证明. 证毕

例 2 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$ 证明

A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

解 变形所给的等式, 得

$$A^2 - A - 2E = O,$$

移项得 $A^2 - A = 2E,$

提出公因子得

$$A(A - E) = 2E,$$

两边取行列式得

$$|A(A-E)| = |2E| = 2^n \neq 0,$$

由方阵的行列式的性质得

$$|A| |A-E| = |A(A-E)| = 2^n \neq 0,$$

所以 $|A| \neq 0$, 故 A 可逆.

又因为

$$A(A-E) = 2E,$$

变形得

$$A \cdot \frac{A-E}{2} = E,$$

由逆矩阵的定义知

$$A^{-1} = \frac{A-E}{2}.$$

现再证

$A+2E$ 可逆.

$$A^2 - A - 2E = O,$$

移项得

$$A+2E = A^2,$$

两边取行列式得 $|A+2E| = |A^2| = |A|^2 \neq 0,$

所以 $A+2E$ 可逆.

在等式 $A+2E=A^2$ 两边左乘 A^{-2} 得

$$A^{-2}(A+2E)=A^{-2}A^2=E,$$

再两边右乘 $(A+2E)^{-1}$ 得

$$\begin{aligned}(A+2E)^{-1} &= A^{-2} = (A^{-1})^2 \\ &= \left(\frac{A-E}{2}\right)^2 = \frac{3E-A}{4}.\end{aligned}$$

例 3 設

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad AB = A + 2B, \quad \text{求 } B.$$

解 已知方程变形 得

$$AB - 2B = A,$$

分解因式 得 $(A - 2E)B = A,$

两边左乘 $(A - 2E)^{-1}$, 得 $B = (A - 2E)^{-1} A$

$$= (A - 2E)^{-1} (A - 2E + 2E)$$

$$= E + 2(A - 2E)^{-1},$$

而

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

用伴随矩阵法求逆，得

$$(A - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

所以

$$B = E + 2(A - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

例 4 解下列矩阵方程

$$AXB = C$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 由已知易得 $X = A^{-1}CB^{-1}$,

下面求 A 和 B 的逆阵.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

例 5 设 n 级矩阵 $A, B, A + B$ 均可逆, 证明

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(B + A)^{-1}A.$$

证 将 $A^{-1} + B^{-1}$ 表示成已知的可逆矩阵的乘积:

$$\begin{aligned} A^{-1} + B^{-1} &= A^{-1}(E + AB^{-1}) = A^{-1}(BB^{-1} + AB^{-1}) \\ &= A^{-1}(B + A)B^{-1}. \end{aligned}$$

由可逆矩阵的性质可知

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = [A^{-1}(A + B)B^{-1}]^{-1} = B(B + A)^{-1}A.$$

同理可证另一个等式也成立.

例 6 设 A 为 n 级方阵 ($n \geq 2$), 证明

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

证 由于 $AA^* = A^*A = |A|E$, 所以

$$|A| |A^*| = |A|^n \quad (4)$$

下面分三种情形讨论:

(1) $|A| \neq 0$, 即 A 可逆, (4) 式两端除以 $|A|$ 即

得
$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

(2) $|A| = 0$, 且 $A = O$, 则 $A^* = O$, 结论显然成立.

(3) $|A| = 0$, 但 $A \neq O$, 反设 $|A^*| \neq 0$, 则 A^* 可逆,

因而 $A = (AA^*)(A^*)^{-1} = (|A|E)(A^*)^{-1} = |A|(A^*)^{-1} = O$,

故 $A = O$, 与 $A \neq O$ 矛盾, 所以, $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$.

小结和作业

1. 请叙述判断可逆矩阵的充要条件?
2. 如何求可逆矩阵的逆矩阵?
3. 可逆矩阵的性质有哪些?
4. 作业见学习通.