第一章 向量与坐标

一． 填空题

1．已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两互相垂直，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，则$|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|=$

____________________.

2．$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=$_______________________.

3. 已知点$A(2,0,-1)$，矢量$\overrightarrow{AB}=\{1,3,4\}$，则点B的坐标是_______________________.

4. 设$ABCD-EFGH$是平行六面体，则下列矢量中相等的矢量有___________，相反的矢量有____________.

$(1).\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD};(2)\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CG};(3)\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EG};(4)\overrightarrow{AD},\overrightarrow{GF};(5)\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CH}$

5. 已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两互相垂直，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=$ _______.

6．已知等边三角形的边长$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为 1，则$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$____________________.

7．已知$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=2$，则$\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=$______________.

8. 平行于矢量$\vec{a}=\{6,7,-6\}$的单位矢量是_______________.

9．矢量$\vec{a}=\{2,2,1\}$的模$\left|\vec{a}\right|=$ _________，方向余弦是__________________.

10．三个非零矢量共面的充要条件是______________.

11．设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为单位矢量，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$_________.

12．矢量$\{3,8,1\}$在矢量$\{2,5,-1\}$上的投影是____________.

13．长为 4 的矢量$\vec{a}$和单位矢量$\vec{e}$的夹角为$\dfrac{2}{3}\pi$，则矢量$\vec{a}$在方向$\vec{e}$上的投影为________.

14．已知平行四边形$ABCD$中，$A(0,-2,0)$，$B(2,0,1)$，$C(0,4,2)$，则顶点D的坐标为________________.

15. 设$|\vec{\alpha}|=1,|\vec{\beta}|=3,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$，则以$\vec{\alpha},\vec{\beta}$为邻边的平行四边形的面积为___________________.

16．设矢量$\vec{a}=\{1,2,-4\}$，$\vec{b}=\{2,1,8\}$，若$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与OZ轴垂直，则λ

为_____________.

17. 已知：A(1,0,0)、B(0,2,0)、C(0,0,3)，则ΔABC 的重心 G 的坐标为______________.

18. 已知$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\angle\left(\vec{a},\vec{c}\right)=\angle\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\dfrac{\pi}{3}$，$\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{b}\right|=2,\left|\vec{c}\right|=3$，则$\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{b}-3\vec{c}\right)=$__________.

19. 设$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=1$，则$\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=$___________.

20. 若$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d},\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，则$\vec{a}-\vec{d}$与$\vec{b}-\vec{c}$的相互位置为___________.

21. 设$\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{y}$且$\vec{a}\times\vec{x}=\vec{a}\times\vec{y}$，其中$\vec{a}\neq\vec{0}$，则$\vec{x}$与$\vec{y}$的关系是____________.

22. 已知$\vec{a}=\{1,2,1\}$，$\vec{b}=\{0,1,1\}$，且$\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$，与$\vec{a},\vec{b}$均垂直的单位矢量为________.

23. 已知$\vec{a}=\{1,2,1\}$，$\vec{b}=\{0,1,1\}$，那么$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角$\angle(\vec{a},\vec{b})=$______.

24. 点$(7,-3,1)$关于点$(4,0,-1)$对称的点的坐标是__________.

二．选择题

1．$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$成立的条件是(　　　)

A．$\vec{a}$与$\vec{b}$同向　　B．$\vec{a}$与$\vec{b}$反向　　C．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　D．$\vec{a}//\vec{b}$

2．如果$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$，且$\vec{c}\neq\vec{0}$，那么(　　　)

A．$\vec{a}=\vec{b}$　　B．$\vec{a}//\vec{b}$　　C．$(\vec{a}-\vec{b})//\vec{c}$　　D．$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$

3．对矢量的运算，下列说法错误的是（　　　）

A．$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$　B．$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$　C．$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$　D．$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

4．在空间直角坐标系中，点$(2,3,-4)$关于yoz平面对称的点的坐标为（　　　）

A．$(-2,3,-4)$　B．$(2,-3,4)$　C．$(2,3,4)$　D．$(-2,3,4)$

5．两个矢量相等必须满足两矢量（　　　）

A．长度相等　　B．模相等且方向相同

C．方向相等　　　　D．模相等、方向相同且有共同始点

6. 在空间直角坐标系内，点 $(1,-2,-1)$ 和点 $(-1,-2,1)$ 关于（　　）对称.

A． xOy 平面　　B． x 轴　C． y 轴　　D．　yOz 平面

7. 已知 $|\vec{a}|=13, |\vec{b}|=19, |\vec{a}+\vec{b}|=24$, 则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$　（　　）

A．20　B．　22　C．24　D．23

8. 已知 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$, 当 $l=$　（　　）时，矢量 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}-\lambda\vec{b})$.

A． $\dfrac{3}{5}$　　B．1　　C． $\dfrac{4}{5}$　　D． $-\dfrac{4}{5}$

9. 矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 满足（　　）时，矢量 $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$.

A． $|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　B． $\vec{a}\parallel\vec{b}$　　C． $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　D． $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

10. 下列各式正确的是（　　）

A． $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$　　　　B． $\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}^2\cdot\vec{b}$

C． $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$　　　D． $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

11. 下列各式正确的是（　　）

A． $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$　　　B． $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

C． $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$　　　D． $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$

12. 在直角坐标系下， $\vec{a}=\{1,0,-1\}, \vec{b}=\{0,1,2\}$, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=$（　　）

A． $(1,-2,1)$　　B． $\{1,2,1\}$　C． $\{1,-2,-1\}$　D． $\{1,2,-1\}$

13. 在下列四个矢量中，与矢量 $\{1,1,1\}$ 和 $\{1,2,3\}$ 都垂直的矢量是(　　)

A． $\{-1,2,-1\}$　　B． $\{1,2,1\}$　　C． $\{-1,-2,-1\}$　　D． $\{1,2,-1\}$

14. 设 $\vec{a},\vec{b}$ 是空间中任意两矢量，下列四式中恒成立的是(　　)

A． $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$　　　　B． $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

C． $|\vec{a}+\vec{b}|\ge|\vec{a}|+|\vec{b}|$　　　　D． $|\vec{a}+\vec{b}|\ne|\vec{a}|+|\vec{b}|$

15. 下列各对矢量中，互相垂直的是(　　)

A． $\{1,0,2\}$ 和 $\{2,0,4\}$　　B． $\{1,1,1\}$ 和 $\{-1,0,2\}$

C． $(3,2,1)$ 和 $(2,-3,0)$　　D． $(0,4,3)$ 和 $\{1,0,2\}$

16. 若矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}^2=\vec{b}^2$，则下列结论中恒成立的是（　　）

A． $\vec{a}=\vec{b}$　B． $\vec{a}\times\vec{b}=0$　C． $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　D． $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

17. 设三个矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，那么 $\vec{a}\times\vec{b}=$（　　）

A． $\vec{b}\times\vec{a}$　B． $\vec{c}\times\vec{b}$　C． $\vec{b}\times\vec{c}$　D． $\vec{a}\times\vec{c}$.

18. 设矢量 $\vec{Q}$ 与三轴正向夹角依次为 α,β,γ，当 $\cos\beta=0$ 时，有（　　）

A． $\vec{Q}\perp xoy$平面　B． $\vec{Q}\perp yoz$平面　C． $\vec{Q}//xoz$平面　D． $\vec{Q}\perp xoz$平面

19. 当 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$，下列结论哪些恒成立？（　　）

A． $\vec{a}=\lambda\vec{b}$　B． $\vec{a}\times\vec{b}=0$　C． $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　D． $\vec{a}=\vec{b}$

20. 下列各式正确的是（　　）

A． $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$　B． $\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\vec{c}\right)$

C． $\vec{p}^2\vec{q}^2=\left(\vec{p}\vec{q}\right)^2$　D． $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$

21. 把空间中一切单位矢量归结到共同的始点，它们的终点构成的图形为（　　）

A． 圆　B． 球面　C． 单位圆　D． 单位球面

三．解答题

1. 已知三矢量 $\vec{a}=\{1,1,2\},\vec{b}=\{2,-3,4\},\vec{c}=\{1,5,-1\}$，判定三矢量是否共面，并判断矢量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与矢量 $\vec{c}$ 是否垂直.

2. 已知三角形的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$、$C(2,5,7)$，求（1）ΔABC 的面积.（2）ΔABC 的 AB 边上的高.

3. 已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$、$B(2,1,2)$，求 (1) 三角形的面积. (2) $\angle AMB$.

4. 已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，试求 $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]^2$.

5. 已知四面体的三个顶点为 $A(2,1,-1)$，$B(3,0,1)$，$C(2,-1,3)$，其体积 $V = 5$，且它的顶点 D 在 Oy 轴上，求 D 的坐标.

6. 在右手直角坐标系中，一个四面体的顶点为 $A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7)$, $D(-5,4,8)$，求它的体积.

7. 已知 3 个矢量 $\vec{a}=\{3,-6,1\}$，$\vec{b}=\{1,4,-5\}$ 与 $\vec{c}=\{3,-4,12\}$，求矢量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在矢量 $\vec{c}$ 上的投影.

8. 设点 $M(7,-4,1)$ 和 $N(-2,2,4)$ 把线段 AB 三等分，求点 A,B 的坐标.

9. 已知三角形的顶点 $A(1,2,3), B(3,4,5)$，$C(2,\lambda,7)$，ΔABC 的面积 $\sqrt{14}$，求三角形的顶点 C 的坐标.

10. 判别矢量$\vec{a}\{3,0,-1\},\vec{b}\{2,-4,3\},\vec{c}\{-1,-2,2\}$是否共面，若不共面，求以它们为三条棱的平行六面体的体积.

11.已知空间三点 A(1,2,3)，B(2,－1,5),C(3,2,－5)，试求（1）ΔABC 的面积.（2）ΔABC 的 AB 边上的中线长.

12.已知矢量$\vec{x}$与$\vec{a}=\{1,5,-2\}$共线， 且满足$\vec{a}\cdot\vec{x}=3$，求矢量$\vec{x}$的坐标.

13.已知四点$A(0,0,0)$，$B(6,0,6)$，$C(4,3,0)$，$D(2,-1,3)$，求三棱锥$D-ABC$中ABC面上的高.

14. 已知矢量$\vec{a}+3\vec{b}$与$7\vec{a}-5\vec{b}$垂直，且$\vec{a}-4\vec{b}$与$7\vec{a}-2\vec{b}$垂直，求$\vec{a},\vec{b}$的夹角.

15. 在四边形 ABCD 中，设对角线矢量$\overrightarrow{AC}=\vec{a},\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，若对角线互相平分，求矢量$\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{BC}$,并指出这个四边形为何种四边形.

16. 已知：$|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2$，$<\vec{\alpha},\vec{\beta}>=\dfrac{\pi}{3}$，求$|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|$.

17. 设平行四边形对角线为$\vec{a}=\overrightarrow{m}+2\vec{n}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{m}-4\vec{n}$，而$|\overrightarrow{m}|=1,|\vec{n}|=2,\angle(\overrightarrow{m},\vec{n})=30^{0}$，求该平行四边形的面积.

18. 已知三矢量$\vec{a}=\{1,\ 2,\ 3\}$，$\vec{b}=\{4,-2,\ 0\}$，$\vec{c}=\{0,\ \frac{5}{2},\ 3\}$，判定三矢量是否共面，能否将$\vec{c}$表成$\vec{a}$，$\vec{b}$的线性组合？若能表示，写出表示式.

19. 在标架$\left\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$下，平行四边形$ABCD$中三顶点坐标分别为$A(0,2,0),B(-2,1,3),C(0,4,2)$，求第四点D和对角线的交点M的坐标.

20. 已知矢量$\overrightarrow{AB}$与单位矢量$\vec{e}$的夹角为30°，且$\left|\overrightarrow{AB}\right|=10$，求射影矢量$_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$与射影$_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$，又如果$\vec{e}'\neq-\vec{e}$，求射影矢量$_{\vec{e}'}\overrightarrow{AB}$与射影$_{\vec{e}'}\overrightarrow{AB}$.

21. 已知$\left|\vec{a}\right|=2,\quad \left|\vec{b}\right|=5,\quad \angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{3}\pi,\quad \vec{p}=3\vec{a}-\vec{b},\quad \vec{q}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}.$问系数$\lambda$取何值时$\vec{p}$与$\vec{q}$垂直？

22. 已知矢量$\vec{a},\vec{b}$互相垂直，矢量$\vec{c}$与$\vec{a},\vec{b}$的夹角都是60°，且$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=3$，计算$(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})^2$.

23. 已知平行四边形以$\vec{a}=\{1，2，-2\}$，$\vec{b}=\{2，-2，1\}$为两边(1)求它的边长和内角. (2)求它的两对角线的长和夹角.

24. 已知△ABC的三顶点$A(0,0,3)$, $B(4,0,0)$, $C(0,4,0)$，(1)求$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$边的夹角余弦. (2)求角$A$的角平分线矢量$\overrightarrow{AD}$，并求$\overrightarrow{AD}$的方向余弦和单位矢量.

25. 已知三点$A(1,0,0)B(0,1,1)C(2,0,1)$，且$\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b},\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，求(1)$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角余弦;(2) $\vec{a}$在$\vec{c}$上的投影.

26. 已知：$\vec{a}=\{2,-3,1\}$，$\vec{b}=\{4,-2,1\}$, $\vec{d}=\{2,1,-3\}$，求与$\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直, 且满足 $\vec{c}\cdot\vec{d}=8$ 的矢量$\vec{c}$.

27. 已知：$\vec{a}=\{2,2,1\}$, $\vec{b}=\{4,2,4\}$，试求：(1) 以$\vec{a},\vec{b}$为边的平行四边形的面积.
(2) 平行四边形的两条高的长.

28. 已知直角坐标系内 A、B、C、D 坐标为 $A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,4,8)$，判别四点是否共面?若不共面, 求以其为顶点的四面体体积和从顶点D所引出的高的长.

29. 设矢量$\vec{a}=\{3,5,-4\}$，$\vec{b}=\{2,1,8\}$，计算$2\vec{a}+3\vec{b}$，并选择适当的λ,μ使得$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$与 z 轴垂直.

30. 已知矢量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$，且$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3},\left|\vec{b}\right| = 1$, 计算两矢量$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$和$\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$之间的夹角$\theta$的余弦.

31. 求长为 14 且同时垂直于矢量$\vec{a} = \{3,2,2\}$与$b = \{18,-22,-5\}$又与 y 轴成钝角的矢量$\vec{c}$.

32. 在直角坐标系内, 已知$\vec{a} = \{1,0,-1\},\vec{b} = \{1,-2,0\},\vec{c} = \{-1,2,1\}$, 求$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$和$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

33. 已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两互相垂直，且$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=2$，求$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$的长及$\vec{r}$与$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的夹角.

34. 在 ΔABC 中，设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{e_2}$. 设 D、E 是边 BC 三等分点，将矢量 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$ 分解为 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 的线性组合.

35. 在 ΔABC 中，设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{e_2}$ ，$\angle A$ 的平分线交边 BC 于点 T，$\overrightarrow{BT}=\lambda\overrightarrow{TC}$ ，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}}{1+\lambda}$ ，求将 $\overrightarrow{AT}$ 分解为 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 的线性组合.

36. 已知直角坐标系内矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的分量 $\vec{a}=\{3,4,5\}$ ，$\vec{b}=\{1,2,2\}$ ，$\vec{c}=\{9,14,16\}$ ，能否求出以它们为三邻边的平行六面体体积？

37. 已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$、$B(2,\lambda,2)$ ，$\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$ ，求三角形的面积.

38. 在标架 $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ 下，平行四边形 $ABCD$ 中顶点 A,B 坐标分别为 $A(0,2,0),B(-2,1,3)$,对角线的交点M 的坐标 $(0,3,1)$,求另外两点C、D的坐标.

39. 已知通过点$M(0,-1,1)$的直线平行于矢量$\vec{v}=\{2,1,-2\}$，求点$P(1,0,1)$到此直线的距离.

40. 已知矢量$\vec{a}+3\vec{b}$与$7\vec{a}-5\vec{b}$垂直，且$\vec{a}-4\vec{b}$与$7\vec{a}-2\vec{b}$垂直，求$\vec{a},\vec{b}$的夹角.

解法如下：由题意知：$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$，即$7\vec{a}^2+16\vec{a}\vec{b}-15\vec{a}^2=0$ (1)

$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$，即$7\vec{a}^2-30\vec{a}\vec{b}+8\vec{b}^2=0$ (2)

(1) − (2) 得：$2\overrightarrow{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$ (3) 即$2\vec{a}=\vec{b}$，从而$\vec{a}\times\vec{b}=0$ (4)

$\therefore\ \sin\angle(a,b)=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$ $\therefore\angle(\vec{a},\vec{b})=0$或$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$ (5)

以上解法中有两步骤有误，在哪里？请写出正确做法.

41. 已知$\vec{a} \perp \vec{b}$，$\angle\left(\vec{a},\vec{c}\right) = \angle\left(\vec{b},\vec{c}\right) = \dfrac{\pi}{3}$，$\left|\vec{a}\right| = 1, \left|\vec{b}\right| = 2, \left|\vec{c}\right| = 3$，求$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$的长.

42. 已知矢量$\vec{a} = \{2,-3,6\}$与$\vec{b} = \{-1,2,-2\}$共起点，在沿$\vec{a}$与$\vec{b}$角平分线的方向上求一长为$3\sqrt{42}$的矢量.

43. 已知矢量$\vec{a} = \{3,-2,1\}$，$\vec{b} = \{-1,1,-2\}$，$\vec{c} = \{2,1,-3\}$，求矢量$\vec{p} = \{11,-6,5\}$关于三矢量的分解式.

44. 已 知 平 行 六 面 体 的 棱 长 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 以 及 三 个 顶 角 Ð$BOC = a$,Ð$COA = b$,Ð$AOB = g$，求从点$O$所引的对角线的长.

45. 已知矢量$\vec{c}$垂直于两矢量$\vec{a},\vec{b}$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，且$\left|\vec{a}\right|=6,\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=3$, 计算$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

46. 已知三角形ABC三边的矢量$\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b},\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，点$O$是三角形的外心，用矢量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$来表示矢量$\overrightarrow{AO}$.

47. 在空间直角坐标系$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下，求$M\ (a,b,c)$关于(1) 坐标平面；(2) 坐标轴；(3) 坐标原点的各个对称点的坐标.

48. 已知$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=2$，计算$\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

49. 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$ ， $\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$ ， $\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ ， 求矢量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的射影及在 y 轴上的射影矢量.

50. 已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=7$，$|\vec{c}|=5$，并且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$， 计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

51. 设力 $F=-i+3j-2k$ 作用在原点点，求力 F 对点 $B(-2,0,1)$ 的力矩的大小.

52. 矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 具有相同的模，且两两所成的角相等，若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的坐标分别为 $(1,1,0)$ 和 $(0,1,1)$，求矢量 $\vec{c}$ 的坐标.

53. 已知点 $A(3,6,1)$， $B(2,-4,1)$， $C(0,-2,3)$， $D(-2,0,-3)$，（1）求以 AB， AC， AD 为邻边组成的平行六面体的体积.（2） 求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.（3）求 ΔBCD 的面积.

54. 已知平面 α 与三个坐标轴的交点分别为 A,B,C 且 $O-ABC$ 的体积为 80，又 α 在三个坐标轴上的截距之比为 $4:-5:-3$，求点 A,B,C 的坐标.

55. 设 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ ，试在 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所确定的平面内，求一个与 $\vec{a}$ 垂直的单位矢量.

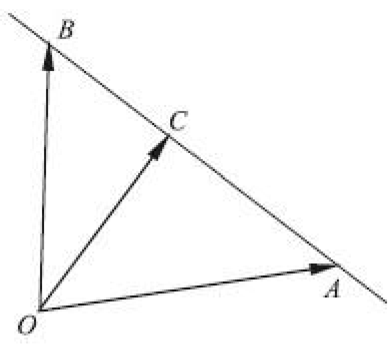
四．证明题

1．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，证明：$A$、$B$、$D$ 三点共线.

2. 设 $\vec{a},\vec{b}$ 是两不共线矢量，证明矢量 $\vec{u}=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b},\vec{v}=\lambda_2\vec{a}+\mu_2\vec{b}$ 共线的充要条件是 $\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \mu_1 & \mu_2\end{vmatrix}=0$.

3. 证明三个矢量 $\vec{a}=-\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$， $\vec{b}=4\overrightarrow{e_1}-6\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$，$\vec{c}=-3\overrightarrow{e_1}+12\overrightarrow{e_2}+11\overrightarrow{e_3}$ 共面，其中 $\vec{a}$ 能否用 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性表示？如能表示，写出线性表示关系式.

4．如图 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 是三个两两不共线的矢量，且 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，试证 A，B，C 三点共线的充要条件是 $\lambda+\mu=1$.



5. 设$\overrightarrow{OP_i} = g_i\ (i = 1,2,3,4)$，证明若$P_1,P_2,P_3,P_4$四点共面则是存在不全为0的实数$\lambda_i\ (i = 1,2,3,4)$使得$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\overrightarrow{\gamma_i} = 0$且$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i = 1$.

6. 已知非零矢量$\vec{n}$和平面α，平面内有两非零矢量$\vec{a},\vec{b}$相交，$\vec{n}\perp\vec{a}$，$\vec{n}\perp\vec{b}$，求证$\vec{n}$垂直于平面α.

7. 已知矢量$\vec{a},\vec{b}$不共线，问$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$与$\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$是否线性相关?

8. 用矢量法证明：P是ΔABC重心的充要条件是$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$.

9. 设 $\overrightarrow{OP_i} = g_i \ (i = 1,2,3,4)$，证明：若存在不全为 0 的实数 $\lambda_i \ (i = 1,2,3,4)$，使得 $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \overrightarrow{\gamma_i} = 0$ 且 $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1$，则 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面.

10. 证明菱形的两对角线互相垂直.

11. 设点 O 是平面上正多边形 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的中心，证明：$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

12. 用矢量法证明三角形各边的垂直平分线共点且这点到各顶点等距.

13. 设L、M、N分别是ΔABC的三边BC、CA、AB的中点，证明：三中线矢量$\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$可以构成一个三角形.

14. 用矢量法证明平行四边行的对角线互相平分.

15. 用矢量法证明三角形三中线共点.

16. 用矢量法证明梯形两腰中点连续平行于上、下两底边且等于它们长度和的一半.

17. 记互不共线的三矢量为$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，证明三矢量首尾顺次连接形成三角形的充要条件是它们的和是$\vec{0}$.

18. 内接于半圆且以直径为一边的三角形是直角三角形.

19. 用矢量方法证明三角形的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

20. 用矢量方法证明三角形面积公式：$\Delta^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$，式中 $p=(a+b+c)$ 是三角形的半周长，Δ为三角形的面积.

21 用矢量法证明三角形的余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

22. 利用数性积证明不等式$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{3}a_i{}^2b^2{}_i$.

23．证明：(1)．矢量$\vec{a}$垂直于矢量$(\vec{a}\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$；

(2)．如果$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$．那么$\vec{a}-\vec{d}$与$\vec{b}-\vec{c}$共线.

24．如果$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，那么$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$．

25．如果$\vec{a}=\vec{p}\times\vec{n}$，$\vec{b}=\vec{q}\times\vec{n}$，$\vec{c}=\vec{r}\times\vec{n}$，那么向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面.

26．设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为三个非零矢量，证明$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\right)=2\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

27．证明在平面上如 果$\vec{m}_1\not\parallel\vec{m}_2$，且$\vec{a}\cdot\vec{m}_i=\vec{b}\cdot\vec{m}_i$ （i=1, 2），则有$\vec{a}=\vec{b}$．

28. 在平行四边形 $ABCD$ 中，求证 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

29. 设 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为三个非零矢量，证明（$\vec{a}\times\vec{b}$）^{2}≤$\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$，并说明在什么情形下等号成立.

30. 对矢量 $\vec{a},\vec{b}$，求证 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$.

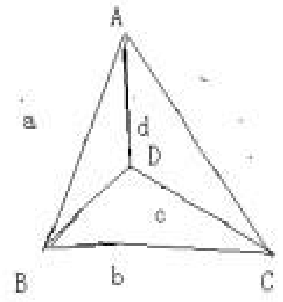
31. 若三矢量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 满足条件 $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=0$，则三矢量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 共面.

32. 若三矢量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 满足 $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=0$，求证三点 A,B,C 共线.

33. 如图所示，在空间四边形 $ABCD$ 中

$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{CD}=\vec{c},\overrightarrow{DA}=\vec{d}$， $\left|\overrightarrow{AB}\right|=a,\left|\overrightarrow{BC}\right|=b,$

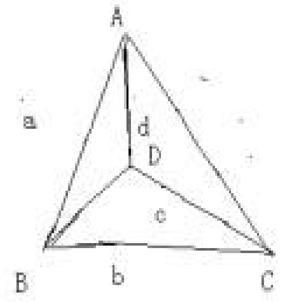
$\left|\overrightarrow{CD}\right|=c,\left|\overrightarrow{DA}\right|=d$，若 $AC\perp BD$，证明 $\vec{a}^2+\vec{c}^2=\vec{b}^2+\vec{d}^2$.



34．如图所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，

$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{CD}=\vec{c},\overrightarrow{DA}=\vec{d}$， $\left|\overrightarrow{AB}\right|=a,\left|\overrightarrow{BC}\right|=b,$

$\left|\overrightarrow{CD}\right|=c,\left|\overrightarrow{DA}\right|=d$，证明若 $\vec{a}^2+\vec{c}^2=\vec{b}^2+\vec{d}^2$，则 $AC\perp BD$.



35. 证明 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件是 $\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{c}\times\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}$ 共面.

36. 利用矢量证明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)$，并说明何时等号成立.

37,. 设一直线上三点 A, B, P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$（$\lambda\neq -1$），$O$ 是空间任意一点，求证：$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

38. 设径矢 $\overrightarrow{OA}=\vec{r}_1$， $\overrightarrow{OB}=\vec{r}_2$， $\overrightarrow{OC}=\vec{r}_3$， 证明 $\vec{R}=\left(\vec{r}_1\times\vec{r}_2\right)+\left(\vec{r}_2\times\vec{r}_3\right)+\left(\vec{r}_3\times\vec{r}_1\right)$ 垂直于平面 ABC.

39. 如果非零矢量 $\vec{r}_i$（$i=1,2,3$）满足 $\vec{r}_1=\vec{r}_2\times\vec{r}_3$，$\vec{r}_2=\vec{r}_3\times\vec{r}_1$，$\vec{r}_3=\vec{r}_1\times\vec{r}_2$，那么 $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ 是彼此垂直的单位矢量.

40. 用矢量法证明等腰三角形底边上的中线垂直于底边.

41. 三角形三条中线的长度的平方和等于它的三边的长度平方和的 $\frac{3}{4}$.

42. 如果三个矢量 $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ 共面，证明它们也共线.

43. 对于任意三个矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，证明：矢量 $\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a},\vec{a}-\vec{b}$ 共面.

44. 证明等式 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=0$.

45. 证明 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}'\times\vec{b}'\right)=\left(\vec{a}\vec{b}\vec{b}'\right)\vec{a}'-\left(\vec{a}\vec{b}\vec{a}'\right)\vec{b}'=\left(\vec{a}\vec{a}'\vec{b}'\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\vec{a}'\vec{b}'\right)\vec{a}$.

46. 证明 对于任意矢量$\vec{r}_i\left(i=1,2,3,4\right)$下式成立：

$$\left(\vec{r}_1\times\vec{r}_2\right)\left(\vec{r}_3\times\vec{r}_4\right)+\left(\vec{r}_1\times\vec{r}_3\right)\left(\vec{r}_4\times\vec{r}_2\right)+\left(\vec{r}_1\times\vec{r}_4\right)\left(\vec{r}_2\times\vec{r}_3\right)=0.$$

47. 证明 $\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d},\vec{e}\times\vec{f}\right)=\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}\right)\left(\vec{c}\,\vec{e}\,\vec{f}\right)-\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\left(\vec{d}\,\vec{e}\,\vec{f}\right)$.

48. 对于任意量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$，证明：$\left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)\vec{a}-\left(\vec{c}\,\vec{d}\,\vec{a}\right)\vec{b}+\left(\vec{d}\,\vec{a}\,\vec{b}\right)\vec{c}-\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\vec{d}=\vec{0}$.

49. 证明等式：$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{a}\times\lambda\vec{a}=0$.

50. 已知三角形的三个顶点为$A\left(-1,2,3\right)$, $B\left(1,1,1\right)$, $C\left(0,0,5\right)$，试证ΔABC为直角三角形，并求$\angle B$.

第二章 轨迹与方程

一． 填空题

1. 方程 $x^2+2y^2=0$ 表示的是________________.

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示的曲面为________________.

3. 在 yoz 平面上，半径为 1，圆心为原点的的圆的方程为________________.

4. 中心在原点，半径为 r 的球面的参数方程为________________.

5. $x^2+y^2=1$ 在空间上表示的是________________.

6. 一平面平行于坐标平面 xOy，且在 z 轴的正向一侧与平面 xOy 相隔的距离为 k，则它的方程为____________.

7. 直线的标准方程可表示为____________.

二．选择题

1. 下列那个点在曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=36\\ y+z=0\end{cases}$ 上？（　　）.

A. $(3,4,-4)$　B. $(-3,2,4)$　C. $(1,-4,4)$　D $(2,3,-3)$

2. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=49\\ x^2+y^2+z^2-4z-25=0\end{cases}$ 上的点 $(3,2,6)$ 使曲线的（　　）

A. 横坐标为 3　B. 纵坐标为 4　C. 竖坐标是 8　D. 以上均不正确

3．在空间坐标系中，方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 表示的是（　　）

A. 双曲线　　B. 母线平行于 y 轴的椭球面面

C. 母线平行于 x 轴的抛物柱面　　D. 母线平行于 x 轴的双曲柱面

4. 在空间，方程 $x^2-y^2-4x+4=0$ 与方程（　　）表示的是同一图形

A. $\begin{cases}x=t\\ y=\pm(t-2)\\ z=t\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x-y-2=0\\ x+y-2=0\end{cases}$

C. $x-y-2=0$ 和 $x+y-2=0$ D. $\begin{cases} x^2-y^2-4x+4=0 \\ z=0 \end{cases}$

5. 在空间直角坐标系下，方程 $x^2+y^2+2ax+2by=c^2$ 表示（ ）

A. 球面 B. 圆 C. 圆柱 D. 椭球面

6. 设球面方程为 $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$, 则下列点在球面内部的是（ ）

A. $(1,2,3)$ B. $(0,1,-1)$ C. $(0,1,1)$ D. $(1,1,1)$

7. 已知两直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，则下列结论错误的是 （ ）

A．两直线 l_1 和 l_2 相交 $\Leftrightarrow A_1:B_1 \neq A_2:B_2$

B．两直线 l_1 和 l_2 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

C．两直线 l_1 和 l_2 垂直 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

D．两直线 l_1 和 l_2 平行 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

8. 参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \left(-\pi \le \varphi \le \pi, -\infty < u < \infty\right) \\ z=u \end{cases}$ 表示的是（ ）

A. 球面 B. 抛物柱面 C. 圆柱面 D. 椭圆柱面

三 . 解答题

1. 已知两点 $A(-2,2)$ 和 $B(2,2)$,求满足条件 $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=4$ 的动点 M 的轨迹方程.

2. 设动点与点(1, 0, 0) 的距离等于从这点到平面 x=4 的距离的一半，试求此点的轨迹.

3.求通过原点及点 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$的球面方程，且求球心及半径.

4. 求一条直径的两个端点为 $A(2,-3,5)$与 $B(4,1,-3)$的球面方程.

5.求连结两点 $A(1,2,3)$和 $B(2,1,-4)$的线段垂直平分面的方程.

6.求曲线$\overline{r(t)}=\vec{i}\cos\pi t+\vec{j}\sin\pi t+\vec{k}t$ 和 $x^2+y^2+z^2=10$ 的交点.

7. 已知两球面 $x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+41=0$, $x^2+y^2+z^2+6x+2y-6z-10=0$，求以连接它们两中心的线段为直径的球面方程.

8. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x^2+y^2-ax=0$ 的交线的一般方程和参数方程.

9. 把参数方程 $\begin{cases} x=2\cos t+1 \\ y=9\sin t+4\cos t \end{cases} \left(0\le t<2\pi\right)$ 消去参数 t 化为普通方程.

10. 在空间，选取适当的坐标系，求到两定点距离之比为常数的点的轨迹.

11. 一动点到两定点的距离的乘积等于定值 m^2 ,求此动点的轨迹.

12. 求通过原点与 $(4,0,0),(1,3,0),(0,0,-4)$ 球面的方程.

13. 平面 $x=c$ 与 $x^2+y^2-2x=0$ 的公共点组成怎样的轨迹.

14. 把曲线的参数方程化为一般方程： $x=4\sin t, y=4\sin t, z=4\cos t\ \left(0\le t\le 2\pi\right)$.

15. 曲面 $x^2+9y^2=10z$ 与三个坐标面的交线分别是什么曲线？

16. 求空间曲线 $\begin{cases} y^2-4z=0 \\ x+z^2=0 \end{cases}$ 的参数方程.

17. 求空间曲线$\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ z=x+1 \end{cases}$对三个坐标面的射影柱面方程.

18．在空间，选取适当的坐标系，求到两定点的距离之和为常数 8 的点的轨迹（其中两定点距离为 4）.

19．求两坐标面 xoy 和 xoz 所成二面角的平分面方程.

20. 建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面方程.

21. 写出各坐标平面、各坐标轴的方程.

22. 已知两点 $A(0,0,a), B(0,0,-a)$，求到它们距离平方和为 $4a^2$ 的点的轨迹.

23. 导出到两点 $A(0,-5,0), B(0,5,0)$ 的距离之差为 6 的点的轨迹方程.

24. 求平面 yOz 与以点 $C(5,-2,1)$ 为中心，半径为 13 的球面的交线的方程.

25. 求下列三个曲面的交点： $x^2+y^2+z^2=49; y-3=0; z+6=0$.

26. λ 取何值时直线 $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0 \\ x+4y-\lambda z-15=0 \end{cases}$ 与 z 轴相交?

27. 一定点绕 z 轴做角速度为 w 的圆周运动，同时以速度 v_0 做平行于该直线的匀速直线运动，这个动点的轨迹称为圆柱螺线，求圆柱螺线的方程.

28. 平面曲线的普通方程 $x^3 + y^3 - axy = 0\ (a > 0)$ 化为参数方程.

29. 求经过点 $(1,2,5)$ 并且与三个平面均相切的球面的方程.

30. 求旋轮线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$ 的弧与直线 $y = \dfrac{1}{2}$ 的交点.

四．证明题

1. 证明参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2+t^4}\cdots(1) \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}\cdots(2) \\ z=\dfrac{t^4}{1+t^2+t^4}\cdots(3) \end{cases}$的曲线是球面曲线.

2. 证明曲线$x=t, y=2t, z=2t^2$所表示的曲线在曲面$2(x^2+y^2)=5z$上.

3．任何一圆交等轴双曲线$xy=c^2$于四点$P(ct_1,\dfrac{c}{t_1})$, $Q(ct_2,\dfrac{c}{t_2})$, $R(ct_3,\dfrac{c}{t_3})$及$S(ct_4,\dfrac{c}{t_4})$.那么一定有$t_1\cdot t_2\cdot t_3\cdot t_4=1$.

4. 设P,Q,R是等轴双曲线上任意三点,求证ΔPQR的重心H必在同一等轴双曲线上.

5. 证明空间中到定点的距离等于定长的动点的集合是的轨迹是球面.

第三章 平面与空间直线

一. 填空题

1. 过点(2, 3, 3)且在 x 轴和 y 轴上截距分别为-2 和-3 的平面是________________.

2. 过点(2, 3, 3)且与平面 $x+y+z+1=0$ 平行的平面是________________________.

3. 平面 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ 分别于三个坐标轴交于点 A，B，C，则三角形 ABC 的面积是______________________________.

4. 直线 $\begin{cases} x=2t+2, \\ y=-4t-5, \\ z=3t-1. \end{cases}$ 与平面 $\lambda x+\mu y+9z-10=0$ 垂直，则 $\lambda=$_______________.

5. 通过点 $(4,-1,2)$ 且与直线 $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1}$ 垂直的平面方程是_____________.

6. 通 过 直 线 $\begin{cases} 2x+y-2z+1=0, \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 且 与 平 面 $x+y+z-1=0$ 垂 直 的 平 面 方 程 为____________________.

7. 直线 $\frac{x-2}{3}=\frac{y-11}{4}=\frac{z+1}{1}$ 与平面 $3x-2y-z+15=0$ 的位置关系是___________.

8. 方程 $x^2+4xy+my^2-3x+ny=0$，当 $m=$________且 $n=$________时，表示两平行直线.

9. 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离是 ________________________.

10. 直线 $\begin{cases} x=2t+2, \\ y=-4t-5, \\ z=3t-1. \end{cases}$ 与平面 $\lambda x+\mu y+9z-10=0$ 垂直, 则 $\mu=$________________.

11. 将平面方程 $x+2y-z+4=0$ 化为截距式是__________________________.

12. 已知连结两点 $A(3,10,-5)$，$B(0,12,z)$ 的线段平行于平面 $7x+4y-z-1=0$，则 B 点的 $z=$______________________.

13. 将平面 $x-y+1=0$ 化为法式方程得________________________________.

14. 点 $M(1,2,-3)$ 到平面 $5x-3y+z+4=0$ 的离差是_______________________.

15. 求在 y 轴上且到平面 $x+2y-2z-2=0$ 的距离等于 4 个单位的点___________.

16. 求与平面 $9x-y+2z-14=0$ 和平面 $9x-y+2z+6=0$ 距离相等的点的轨迹是

__________________________.

17. 平面$2x-y-2z-5=0$与$x+3y-z-1=0$的相关位置是_________________.

18. 使$lx+y-3z+1=0$与$7x+2y-z=0$表示相互垂直的平面，则$l=$__________.

19. 平面$19x-4y+8z+21=0$与平面$19x-4y+8z+42=0$的距离是________.

20. 求过点$M(x_0,y_0,z_0)$且与x,y,z三轴分别成$30^0,45^0,120^0$的直线方程____________________.

21. 求通过点$M(2,-3,-5)$且与平面$6x-3y-5z+2=0$垂直的直线方程是______.

22. 已知直线$l:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$与平面$lx+3y-5z+1=0$平行，则$l=$________.

23. 直线$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$通过原点的条件是____________________.

24. 已知直线$\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y+\lambda z-15=0\end{cases}$与$z$轴相交，则$\lambda=$_______________.

25. 直线$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$与直线$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{6}$所成的角为_____________.

26. 向量$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$与平面$Ax+By+Cz=0$平行的充要条件是______________.

27. 将平面方程$x+2=0$化为法式方程得__________________________.

28. 与直线$l_1:\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$及直线$l_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$都平行且经过坐标原点的平面方程是________________________________.

29. 设一平面经过原点及$(6,-3,2)$且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程是______________________.

30. 经过点$A(-1,0,4)$，与直线$l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$及$l_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$都交的直线$l$的方程是__________________________.

二. 选择题

1. 已知点$M_0(x_0,y_0,z_0)$和平面$\pi:x+2y+2z+1=0$，则下列结论错误的是（　　）

A. M_0在π上，则$x_0+2y_0+2z_0+1=0$　　B. M_0与π的离差为$x_0+2y_0+2z_0+1$

C. M_0到π的距离为$\dfrac{|x_0+2y_0+2z_0+1|}{3}$　　D. π的法式方程为$\dfrac{x+2y+2z+1}{-3}=0$

2. 已知平面$\pi_1: 2x-y-2z-5=0, \pi_2: x+3y-z-1=0$，$\pi_1$与$\pi_2$的相关位置是（　）

A. π_1与π_2平行　　　　B. π_1与π_2相交，但不垂直

C. π_1与π_2垂直　　　　D. π_1与π_2重合

3. 已知平面$\pi: x-2y-2z-1=0$，则下列结论错误的是（　　）

A. 点(1, 1, 1)不在平面π上　　　　B. 原点与π的离差为-1

C. 点(-2, 0, 0)到π的距离为1　　　　D. π的法式方程为$\dfrac{x-2y-2z-1}{3}=0$

4. 已知直线$l_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{0}, l_2: \dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$，$l_1$与$l_2$的相关位置是（　　）

A. l_1与l_2平行　　　　B. π_1与π_2相交

C. l_1与l_2重合　　　　D. l_1与l_2异面

5. 直线$\begin{cases} x=t, \\ y=-2t+9, \\ z=9t-4 \end{cases}$与平面$3x-4y+7z=0$的相关位置是（　　）

A．相交　　　　B．平行　　　　C．直线在平面上　　　　D．不能确定

6. 已知点$M(1,2,-3)$和平面$\pi: 5x-3y+z+4=0$，则下列结论错误的是（　　）

A．原点到平面π的距离为$\dfrac{4}{\sqrt{35}}$　　　　B．M点到平面π的距离为0

C．M点到平面π的离差为$\dfrac{8}{\sqrt{35}}$　　　　D．平面π的一个法矢量$\vec{n}=\{5,-3,1\}$

7. 在空间直角坐标系下，方程$xy=0$表示（　　）

A．z轴　　　　B．一个点　　　　C．x轴与y轴　　　　D．两个平面

8. 已知两平面$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则下列结论错误的是（　　）

A．两平面π_1和π_2相交$\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$

B．两平面π_1和π_2重合$\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

C．两平面π_1和π_2垂直$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

D．两平面π_1和π_2平行$\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

9. 已知两平面$\pi_1: x+2y-z+1=0$和$\pi_2: 5x-y-6=0$， π_1与π_2的相关位置是（　　）

A. 平行　　　　B. 相交　　　　C. 垂直　　　　D. 重合

10. 直线$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{1}$与平面$x+3y-9z-28=0$的位置关系是（　　）

A. 直线与平面垂直　　　　B. 直线与平面平行但不在平面内

C. 直线在平面内　　　　D. 以上结论都不对

11. 已知两平面$\pi_1: 2x+4y-6z+5=0$和$\pi_2: x+2y-3z+1=0$，π_1与π_2 的相关位置是（　　）

A. 平行　　　　B. 相交　　　　C. 垂直　　　　D. 重合

12. 已知直线$L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$和平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$，则$L\perp\pi$的充要条件是（　　）

A. $Al+Bm+Cn=0$　　　　B. $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

C. 直线L与平面π所成角的正弦值等于 0　　　　D. 以上都不对

13. 设直线$l: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$及平面$\pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线$l$（　　）

A. 平行于π　　　　B. 在π上　　　　C. 垂直于π　　　　D. 与π斜交

14. 已知平面$\pi: x+2y-3z+4=0$，则除了（　　）外其他点都在平面π的同一侧.

A. $(0,0,0)$　　　　B. $(1,0,-2)$　　　　C. $(1,3,0)$　　　　D. $(2,0,2)$

15. 在平面$\pi_1: 2x+my+3z-5=0$和$\pi_2: lx-6y-6z+2=0$中，当$l=-4, m=3$时两平面的相关位置是（　　）

A. 平行　　　　B. 相交　　　　C. 垂直　　　　D. 重合

16. 在直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-8}{3}$上与原点相距25个单位的点是（　　）

A. $(9,12,20)$　　　　B. $(9,12,-20)$

C. $(9,12,20)$和$\left(-\frac{117}{7},-\frac{6}{7},-\frac{130}{7}\right)$　　　　D. $(9,12,-20)$和$\left(-\frac{117}{7},-\frac{6}{7},-\frac{130}{7}\right)$

17. 直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$与平面$x+y+z=3$的位置关系是（　　）

A. 平行　　　　B. 垂直　　　　C. 直线在平面上　　　　D. 无关系

18. 直线方程$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$的系数满足（　　）才能使它与$x$轴平行.

A. $A_1 = A_2 \neq 0$　　B. $A_1 = A_2 = 0$

C. $A_1 = A_2 \neq 0$ 且 $D_1 = D_2 = 0$　　D. $A_1 = A_2 \neq 0$ 且 D_1, D_2 不全为零

19. 直线 $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-7}$ 与平面 $3x - 2y + 7z = 8$ 的相关位置是（　　）

A. 垂直　　B. 平行　　C. 直线在平面上　　D. 相交且垂直

20. 关于平面 $3x - z = 0$ 的位置下列说法正确的是（　　）

A. 表示 yoz 面　　B. 平行于 yoz 面　　C. 经过 yoz 面　　D. 都不正确

21. 关于平面 $8y - 3z = 0$ 的位置下列说法正确的是（　　）

A. 表示 yoz 面　　B. 平行于 yoz 面　　C. 过 x 轴　　D. 平行于 x 轴

22. 平面 $2x - 2y + z + 5 = 0$ 与 xoy 面的夹角是（　　）

A. 60°　　B. 30°　　C. $\arccos\frac{1}{3}$　　D. 45°

23. 点 $(2,1,1)$ 到平面 $x + y - z + 1 = 0$ 的距离是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. 3

24. 两平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角是（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{9}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

25. 已知直线 $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ 与平面 $lx + 3y - 5z + 1 = 0$ 平行，则 $l =$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. 1

26. 两直线 $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ 和 $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ 的位置关系是（　　）

A. 垂直　　B. 平行　　C. 相交　　D. 异面

27. 通过 y 轴且与平面 $7x - 5y + 4z + 3 = 0$ 垂直的平面方程是（　　）

A. $4x + 7z = 0$　　B. $4x - 7z = 0$　　C. $-4x - 7z = 0$　　D. $-4x + 7z = 0$

28. 已知两平面 $3x + ky - z - 14 = 0$ 和 $2x + 7y + z - 1 = 0$ 相互垂直，则 $k =$（　　）

A. $\frac{5}{7}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $-\frac{5}{7}$　　D. $-\frac{1}{7}$

29. 两直线 $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ 和 $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+4}{1}$ 的夹角是（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{9}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

30. 已知三点$M_1(a,0,0)$，$M_2(0,b,0)$，$M_3(0,0,c)$（其中$abc \neq 0$）则过这三点的平面的截距式方程是（　　）

A. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$　　B. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$　　C. $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=1$　　D. 以上都不对

三. 解答题

1. 证明两直线$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-8}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$与$\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-6}{4}$异面，并求出它们之间的距离.

2. 求异面直线$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{-1}$和$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-7}{1}$间的距离和它们的公垂线方程.

3. 化直线$\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$为标准方程.

4. 设平面通过原点O和点$M(6,-3,2)$,且与平面$4x-y+2z=8$垂直,求此平面方程.

5. 已知平面通过两点 $M(3,-2,5)$ 及 $N(2,3,1)$ 且平行于 z 轴，求平面方程.

6. 试求直线 $\begin{cases} x+2y+3z-6=0 \\ 2x+3y-4z-1=0 \end{cases}$ 的对称式方程和参数方程.

7. 试用两种方法求过点 $M_0(0,0,-2)$，与平面 $\Pi_1: 3x-y+2z-1=0$ 平行，且与直线 $l_1: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线 l 的方程.

8. 求通过点 $M_1(3,1,-1)$ 和点 $M_2(1,-1,0)$ 且平行于矢量 $\{-1,0,2\}$ 的平面的坐标式参数方程和一般方程.

9. 求通过点 $M_1(1,-5,1)$ 和 $M_2(3,2,-2)$ 且垂直于 xoy 坐标面的平面的坐标式参数方程和一般方程.

10. 通过点 $M_1(2,-1,1)$ 和 $M_2(3,-2,1)$ 且分别平行于三坐标轴的三个平面的一般方程.

11. 求过点 $M_1(3,-5,1)$ 和 $M_2(4,1,2)$ 且垂直于平面 $x-8y+3z-1=0$ 的平面的一般方程.

12. 过点 $M(3,2,-4)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距分别为 -2 和 -3 的平面的一般方程.

13. 求与平面 $5x+y-2z+3=0$ 垂直且通过 x 轴的平面的一般方程和法式方程.

14. 将平面 $4x-4y+7z=0$ 化为法式方程.

15. 求自坐标原点从平面 $.x-2y+2z+21=0$ 引垂线的长和指向平面的单位法矢量的方向余弦.

16. 已知三角形顶点 $A(0,-7,0),B(2,-1,1),C(2,2,2)$. 求平行于 ΔABC 所在的平面且与它相距为 2 各单位的平面方程.

17. 平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 分别与三个坐标轴交于点 A,B,C. 求 ΔABC 的面积.

18. 试求在 z 轴上且到点 $M(1,-2,0)$ 与到平面 $3x-2y+6z-9=0$ 距离相等的点.

19. 试求在 x 轴上且到平面 $12x-16y+15z+1=0$ 和 $2x+2y-z-1=0$ 距离相等的点.

20. 求通过 x 轴其与点 $M\left(5,4,13\right)$ 相距 8 个单位的平面方程.

21. 求与两平面 $3x+6y-2z-7=0$ 和 $4x-3y-5=0$ 距离相等的点的轨迹.

22. 试确定 l,m,n 的值：使 $(l-3)x+(m+1)y+(n-3)z+8=0$ 和 $(m+3)x+(n-9)y+(l-3)z-16=0$ 表示同一平面.

23. 求通过点 $M_1\left(0,0,1\right)$ 和 $M_2\left(3,0,0\right)$ 且与坐标面 xOy 成 60^0 角的平面方程.

24. 求过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 60^0 角的平面方程.

25. 已知四点 $A(5,1,3)$ ， $B(1,6,2)$ ， $C(5,0,4)$ $D(4,0,6)$ ，求通过直线 AB 且平行于直线 CD 的平面，并求通过直线 AB 且与 ΔABC 平面垂直的平面.

26. 化平面 $\pi: x+2y-z+4=0$ 为截距式与参数式.

27. 求通过点 $A(-3,0,1)$ 和点 $B(2,-5,1)$ 的直线方程.

28. 求通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且平行于两相交平面 π_i ： $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ ， $(i=1,2)$ 的直线方程.

29. 求通过点 $M(1,0,-2)$ 且与两直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 和 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}$ 垂直的直线方程.

30. 求通过点 $M(2,-3,-5)$ 且与平面 $6x-3y-5z+2=0$ 垂直的直线方程.

31. 求通过点 $M(1-5,3)$ 且与 x,y,z 三轴分别成 $60^{\circ},45^{\circ},120^{\circ}$ 的直线方程.

32. 求关于直线 $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ 与点 $P(2,0,-1)$ 对称的点.

33. 求通过点 $p(2,0,-1)$，且又通过直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 的平面方程.

34. 求通过直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z+1}{-1}$ 且与直线 $\begin{cases} 2x-y-z-3=0 \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ 平行的平面方程.

35. 通过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ 且与平面 $3x+2y-z-5=0$ 垂直的平面方程.

36. 求通过直线$\begin{cases}5x+8y-3z+9=0\\2x-4y+z-1=0\end{cases}$向三坐标面所引的三个射影平面方程.

37. 将直线的一般方程$\begin{cases}2x+y-z+1=0\\3x-y-2z-3=0\end{cases}$化为射影式方程与标准方程.

38. 将直线的一般方程$\begin{cases}x+z-6=0\\2x-4y-z+6=0\end{cases}$化为射影式方程与标准方程，并求出它的方向余弦.

39. 将直线的一般方程$\begin{cases}x+y-z=0\\x=2\end{cases}$化为标准方程，并求出它的方向余弦.

40. 试验证直线l：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$与平面$\pi$：$2x+y-z-3=0$相交，并求出它们的交点.

41. 试确定 l,m 的值，使直线 $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -4t - 5 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ 与平面 $lx + my + 6z - 7 = 0$ 垂直.

42. 求与平面 $x + 2y + 3 = 0$ 相切于点 $M(1,1,-3)$ 且半径 $r = 3$ 的球面方程.

43. 求与两平行平面 $6x - 3y - 2z - 35 = 0$ 和 $6x - 3y - 2z + 63 = 0$ 都相切且于其中之一相切于点 $M(5,-1,-1)$ 的球面方程.

44. 直线方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使：直线与 x 轴相交？

45. 试确定 λ 的值，使两直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 与 $x + 1 = y - 1 = z$ 相交？

46. 试判断直线$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -t - 2 \end{cases}$与$\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z+2}{-5}$的相互位置，如果是相交的或平行的直线求出它们所在的平面.

47. 直线方程$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$的系数满足什么条件才能使：直线与$x$轴平行?

48. 试判断直线$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$与$\begin{cases} x + 2y - z - 11 = 0 \\ 2x + z - 14 = 0 \end{cases}$的相互位置，如果是相交的或平行的直线求出它们所在的平面？

49. 试判断直线$\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-8}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$与$\dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-6}{4}$的相互位置，如果是异面直线，求出它们之间的距离？

50. 试验证直线l：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$与平面$\pi$：$2x+y-z-3=0$相交，并求出它们的交角.

51. 给定两异面直线：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$与$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$，试求它们的公垂线方程.

52. 求两直线$\begin{cases}3x-4y-2z=0\\2x+y-2z=0\end{cases}$与$\begin{cases}4x+y-6z-2=0\\y-3z+2=0\end{cases}$的夹角.

53. 求通过点$P(1,0,-2)$且与平面$3x-y+2z-1=0$平行，又与直线$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$相交的直线方程.

54. 求通过点 A $(-3, 1, 0)$ 和直线 $\begin{cases} x+2y-z+4=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$ 的平面方程.

55. 求两直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$ 与 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{6}$ 的夹角.

56. 求通过点 $P(4,0,-1)$ 且与两直线 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$, 与 $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x+4y-z=4 \end{cases}$ 都相交的直线方程.

57. 求与直线 $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$ 平行且和两直线 $\begin{cases} z=5x-6 \\ z=4x+3 \end{cases}$, $\begin{cases} z=2x-4 \\ z=3y+5 \end{cases}$ 相交的直线方程.

58. 求与直线 $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$ 平行且和两直线 $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=3t+5, \\ z=t \end{cases}$ $\begin{cases} x=5t+10 \\ y=4t-7 \\ z=t \end{cases}$ 相交的直线方程.

59. 求过点 $P(2,1,0)$ 且与直线 $l:\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$ 垂直 相交的直线方程.

60. 求点 $p(2,3,-1)$ 到直线 $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{cases}$ 的距离.

61. 求通过平面 $4x-y+3z-1=0$ 和 $x+5y-z+2=0$ 的交线且通过原点的平面方程.

62. 求通过平面 $4x-y+3z-1=0$ 和 $x+5y-z+2=0$ 的交线且与 y 轴平行的平面方程.

63. 求通过平面 $4x-y+3z-1=0$ 和 $x+5y-z+2=0$ 的交线且与平面 $2x-y+5z-3=0$ 垂直的平面方程.

64. 求平面束 $(x+3y-5)+\lambda(x-y-2z+4)=0$，在 x,y 两轴上截距相等的平面.

65. 求通过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面.

66. 求通过直线 $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-3}$ 且与点 $p(4,1,2)$ 的距离等于 3 的平面.

67. 求与平面 $x-2y+3z-4=0$ 平行且通过点 $(1,-2,3)$ 的平面方程.

68. 直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 通过原点的条件是什么？

69. 求与平面 $x-2y+3z-4=0$ 平行且与 y 轴上截距为 -3 的平面方程.

70. 求与平面 $x-2y+3z-4=0$ 平行且与与原点距离为 1 的平面方程.

71. 设一平面与平面 $x+3y+2z=0$ 平行, 且与三坐标平面围成的四面体体积为 6, 求这平面的方程.

72. 直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使直线在坐标平面 xoz 内?

73. 已知连接两点 $A(3,10,-15), B(0,12,z)$ 的线段平行于平面 $7x+4y-z-1=0$，求 B 点的 z 坐标.

74. 求原点 O 在所求平面上的正射影为 $P(2,9,-6)$ 的平面方程.

75. 求过点 $M(2,3,-4)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距分别为 -2 和 -3 的平面方程.

76. 将平面的一般方程 $x-2y+5z-3=0$ 化为法式方程.

77. 求点 $M(-2,4,3)$ 到平面 $2x-y+2z+3=0$ 间的离差和距离.

78. 求在 y 轴上且到平面 $2+2y-2z-2=0$ 的距离等于 16 个单位的点.

79. 已知四面体的四个顶点为 $S(0,6,4), A(3,5,3), B(-2,11,-5), C(1,-1,4)$，计算从顶点 S 向底面 ABC 所引的高.

80. 求中心在 $C(3,-5,2)$ 且与平面 $2x-y-3z+11=0$ 相切的球面方程.

81. 设平面过原点 O 及点 $M(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

82. 已知两条直线方程分别为：$l_1:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ ，$l_2:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-2}{k}=\dfrac{z-2}{-5}$，则$k$为何值时，$l_1,l_2$相交？

83. 求平面$\pi_1:2x-y-2z+1=0$和$\pi_2:4x-2y-4z-7=0$的距离.

84. 求过直线$l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$且平行于直线$l_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$的平面方程.

85. 在直角坐标系下，求通过点$(2,-1,3)$，平行于平面$\pi:x+2y-z-2=0$且垂直于直线$l_1:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{4}$的直线方程.

86. 设点$M(7,-4,1)$和$N(-2,2,4)$把线段AB三等分，求点A,B的坐标.

87. 在右手直角坐标系下，求点$(3,-2,2)$到直线$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$的距离.

88. 设平面$\pi_1: 2x-y+3z-p=0$, $\pi_2: qx+2y-6z+2=0$，问p,q取何值时，

（1）π_1,π_2相交；（2）π_1,π_2平行；（3）π_1,π_2重合？

89. 在直角坐标系中，求过点$M(1,1,1)$，且与两平面$\pi_1: 4x-y+3z-1=0$和$\pi_2: x+5y-z=0$都垂直的平面方程.

90. 求经过点$A(2,-1,3)$，且平行于直线$l:\begin{cases}2x+4y+z+1=0\\2x+2y-z+5=0\end{cases}$的直线方程.

91. 试求经过点 $P(4,-2,1)$ 和 x 轴的平面方程.

92. 试求经过点 $P(1,0,-1)$，并且与直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 和 $l_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交的直线的方程.

93. 求过点 $(1,-1,1)$ 且与两平面 $x-y+z-1=0$ 和 $2x+y+z+1=0$ 都垂直的平面方程.

94. 求过点 $(1,2,-6)$ 且与两平面 $x+2z-8=0$ 和 $2x-y-z+5=0$ 的交线平行的直线方程.

95. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

96. 求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

97. 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$ 与平面 $2x+2y+z-7=0$ 的交点及夹角的正弦值.

98. 求过点 $P(-3,-5,1)$ 且与直线 $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 垂直相交的直线的方程.

99. 求通过点 $A(1,2,-2)$ 且通过直线 $L:\frac{x-2}{3}=y+1=\frac{z-2}{-1}$ 的平面方程.

100. 求直线 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$ 与平面 $2x+y-z-4=0$ 的夹角.

101. 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

102. 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程.

103. 设平面过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

104. 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=(2,1,1)$ 和 $\vec{b}=(1,-1,0)$，求该平面方程.

105. 求通过直线 $l_1:\begin{cases}2x+y-z+1=0\\x+2y+z-5=0\end{cases}$ 且与直线 $l_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ 平行的平面方程.

106. 求通过原点，且垂直于两平面 $x+2y+3z-2=0$ 与 $6x-y-5z+23=0$ 的平面方程.

107. 求通过两点$M_1(0,0,1)$与$M_2(3,0,0)$，且与平面$y+z-1=0$成45^0角的平面方程.

108. 求通过点$M(-2,1,3)$和两平面$2x-7y+4z-3=0,3x-5y+4z+11=0$的交线的平面.

109. 求通过点$(1,0,-2)$且和两直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$与$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{0}$都垂直的直线方程.

110. 求通过点$P\ (1,0,-1)$且与平面$x-2y+3z=0$平行，又与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$相交的直线方程.

111. 已知平面过点$M_0(3,-2,1)$，且与M_0到$M_1(-2,1,4)$的连线垂直，求其方程.

112．在 x 轴上求一点使它到平面 $12x+9y+20z-19=0$ 和到平面 $16x-12y+15z-9=0$ 的距离相等.

113. 求过点 $(-2,1,0)$ 且垂直于平面 $3x-10y+9z-2=0$ 的直线的对称式方程与参数方程.

114. 将直线的一般方程 $\begin{cases}3x-2y+z+1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 化成对称式方程与参数方程.

115. 求直线 $\Gamma_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 与直线 $\Gamma_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角 θ.

116. 讨论直线 $\Gamma_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$ 与平面 $\pi:x+y+z=1$ 之间的关系，相交时求出它们的夹角和交点的坐标.

117. 求过直线 $\Gamma_1:\begin{cases}2x+y-z-2=0\\3x-2y-2z+1=0\end{cases}$ 且与直线 $\Gamma_2:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ 平行的平面方程.

118. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的射影.

119. 求直线 $\Gamma:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 的射影直线 Γ_0 的平面方程.

120. 求通过点 $(4,2,-3)$ 且平行于平面 $x+y+z=10$, 又与直线 $\begin{cases}x+2y-z-5=0\\z-10=0\end{cases}$ 垂直的直线方程.

121. 求经过直线 $l:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$, 而且与点 $A(4,1,2)$ 的距离等于 3 的平面方程.

122. 求过点$M(1,1,1)$且平行于平面$\pi:-2x+y-z+1=0$的平面方程.

123. 求过点$M_1(1,2,0)$和$M_2(2,1,1)$且垂直于平面$\pi:y-x-1=0$的平面方程.

124. 过z轴且与平面$2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$的平面方程.

125. 平面过点$A(-2,3,0)$，$B(1,-1,2)$且与向量$\vec{a}=(4,5,1)$平行，求此平面的方程.

126. 平面过点$M(2,0,-8)$且与两平面$x-2y+4z-7=0$和$3x+5y-2z+3=0$都垂直, 求此平面的方程.

127. 求由平面 $x-3y+2z-5=0$ 与 $3x-2y-z+3=0$ 所成二面角的平分面方程.

128. 对于直线 $l_1:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$，与 $l_2:\begin{cases}2x-y-5=0\\ y-2z+3=0\end{cases}$，（1）证明：$l_1 // l_2$；（2）求 l_1 与 l_2 的距离；（3）求 l_1 与 l_2 所确定的平面方程.

四. 证明题

1. 一直线与三坐标轴间的角分别为 α,β,γ. 证明 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

2. 设直线与三坐标平面的交角分别为 λ,μ,υ. 证明 $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\upsilon=2$.

3. 设 d 和 d' 分别是坐标原点到点 $M(a,b,c)$ 和 $M'(a',b',c')$ 的距离，证明当 $aa'+bb'+cc'+dd'$ 时，直线 MM' 通过原点.

4. 证明矢量 $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$ 平行与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的充要条件为：$AX+BY+CZ=0$.

5. 试判断直线 $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0\\2x-y-z-1=0\end{cases}$ 与平面 $4x-3y+7z-7=0$ 的相互位置关系？

6. 试判断直线 $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $4x-2y-2z=3$ 的相互位置关系？

7. 试判断直线$\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$与平面$3x-2y+7z=8$的相互位置关系？

8. 证明两直线$\begin{cases}x-2y+2z=0\\3x+2y-6=0\end{cases}$与$\begin{cases}x+2y-z-11=0\\2x+z-14=0\end{cases}$平行，求出它们所在的平面.

9. 证明两直线$\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$与$\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$异面，并求出它们之间的距离.

10. 设从坐标原点到平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$的距离为$p$. 求证: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$.

11. 证明直线$l_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$与$l_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$是异面直线.

12. 证明直线$l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$与$l_2:\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-5}$共面.

第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

一. 填空题

1. 椭圆面的标准方程是________________________；单叶双曲面的标准方程是_____________________；双叶双曲面的标准方程是__________________；椭圆抛物面的标准方程是________________________；双曲抛物面的标准方程是_________________________.

2. 空间曲线$\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ z=x+1; \end{cases}$对 xoy 坐标面，yoz 坐标面与 xoz 坐标面的射影柱面方程分别为__________________、__________________、____________________.

3. 顶点为原点，准线为 $x^2-2z+1=0, y-z+1=0$ 的锥面方程为________________.

4. 以原点为顶点，准线为

$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=h \end{cases}$的锥面方程_________________________(其中 h 为不等于零的常数).

5. 空间曲线$\begin{cases} z^2=2px \\ y=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为___________________.

6. 空间曲线$\begin{cases} (x-3)^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$绕 y 轴旋转而成的旋转曲面方程为_____________.

7. 动点与点 $(1,0,0)$ 的距离等于从这个点到平面 $x=4$ 的距离的一半，则此动点的轨迹方程为___________________________.

8. 已知单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$，有一平面平行于 xoz 面且与曲面的交线是一对相交直线, 则此平面的方程为_________________.

9. 已知椭圆抛物面的顶点在原点，对称面为 xoz 面与 yoz 面，且过点 $(1,2,6)$ 和 $(\frac{1}{3},-1,1)$，这个椭圆抛物面的方程为________________________.

10. 直纹曲面 $x^2-y^2-z^2=0$ 的直母线方程为________________.

11. 直线族$\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\lambda}{0}$;所成的曲面（式中的 λ 为参数）________________.

二. 选择题

1. 空间曲线$\begin{cases} x^2+z^2-3yz-2x+3z-3=0, \\ y-z+1=0; \end{cases}$对 xoy 坐标面的射影柱面方程为（　）

A. $y-z+1=0,$

B. $x^2-2y^2-2x+2y+1=0.$

C. $x^2-2z^2-2x+6z-3=0.$

D. $x^2+y^2-x-1=0,$

2.空间曲线 $\begin{cases} z=x^2, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面为（ ）

A. $x^2+y^2=0$

B. $x^2-y^2=0$

C. $x^2+y^2=1$

D. $x^2-y^2=1$

3.平面 $x-2=0$ 与椭球面 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ 的交线的一个顶点坐标为（ ）

A. $(0,\sqrt{3},2)$

B. $(2,\sqrt{3},0)$

C. $(0,2,\sqrt{3})$

D. $(2,0,\sqrt{3})$

4.给定方程 $\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=1\ (A>B>C>0)$，当 $A>\lambda>B$ 时它表示（ ）.

A. 椭球面

B. 单叶双曲面

C. 双叶双曲面

D. 椭圆抛物面

5.已知单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$，试求平面的方程，使这平面平行于 yoz 面且与曲面的交线是一对相交直线（ ）.

A. $x=2$

B. $y=2$

C. $x=3$

D. $y=3$

6.直纹曲面 z=axy 的直母线方程为( )

A. $\begin{cases} x=u \\ z=ay \end{cases}$

B. $\begin{cases} y=u \\ z=ay \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=u \\ z=auy \end{cases}$

D. $\begin{cases} y=u \\ z=auy \end{cases}$

三.解答题

1. 已知柱面的准线为$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$且（1）母线平行于 x 轴；（2）母线平行于直线 x=y, z=c, 试求这些柱面的方程.

2. 设柱面的准线为$\begin{cases}x=y^2+z^2,\\ x=2z,\end{cases}$母线垂直于准线所在的平面，求这柱面的方程.

3. 求过三条平行直线 $x=y=z, x+1=y=z-1$与$x-1=y+1=z-2$ 的圆柱面方程.

4．画出下列方程所表示的曲面的图形：(1) $4x^2+9y^2=36$；(2) $y^2-z^2=4$；(3) $x^2=4z$；(4) $x^2-2x+y=0$.

5. 一个半径为 a 的球面与一个直径等于球的半径的圆柱面，如果圆柱面通过球心，那么这时球面与圆柱面的交线叫做维维安尼（viviani）曲线，这条曲线的方程可以写为

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2-ax=0. \end{cases}$ 试求这曲线对三个坐标面的射影柱面方程和在三坐标面上的射影曲线的方程.

6. 已知锥面的顶点为 $(3,-1,-2)$, 准线为 $x^2+y^2-z^2=1,\ x-y+z=0$, 试求它的方程.

7．求以三坐标轴为母线的圆锥面的方程.

8．求顶点为$(1,2,4)$，轴与平面$2x+2y+z=0$垂直，且经过点$(3,2,1)$的圆锥面的方程.

9．将直线$\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{o}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转，求这旋转曲面的方程，并就$\alpha$和$\beta$可能的值讨论这是什么曲面？

10. 已知曲线Γ的参数方程为：$x=x(u),y=y(u),z=z(u)$，将曲线Γ绕z轴旋转，求曲面的参数方程.

11. 一直线分别交坐标面 yoz, zox, xoy 于三点 A、B、C 当直线变动时，直线上的三定点 A、B、C 也分别在三个坐标面上变动，另外直线上有第四点 P，它与 A、B、C 三点的距离分别为 $a, b, c,$ 当直线按照这样的规定（即保持 A、B、C 分别在三个坐标面上）变动时，试求 P 点的轨迹.

12. 已知椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.\ \left(c<a<b\right)$, 试求过 x 轴并与曲面的交线是圆的平面.

13. 设动点与 $(4,0,0)$ 的距离等于这点到平面 $x=1$ 的距离的两倍, 试求这动点的轨迹.

14. 试求单叶双曲面$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$与平面$x-2z+3=0$的交线对$xoy$平面的射影柱面.

15. 适当选取坐标系，求下列轨迹的方程:(1）到一定点和一定平面距离之比为定常数的点的轨迹；(2）与两给定的异面直线等距离的点的轨迹，已知两异面直线间的距离为$2a$，夹角为2α。

16. 画出下列方程所代表的图形（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=1$；（2）$z=xy$.

17. 画出下列各组曲面所围成的立体的图形:

（1） $y=0, z=0, 3x+y=6, 3x+2y=12, x+y+z=6$；

（2）$x^2+y^2=z$, 三坐标平面，x+y=1；

（3）$x=\sqrt{y-z^2}, \frac{1}{2}\sqrt{y}=x, y=1;$

18. 求直线族$\begin{cases} x+2\lambda y+4z=4\lambda, \\ \lambda x-2y-4\lambda z=4, \end{cases}$所成的曲面（式中的$\lambda$为参数）.

19. 在双曲抛物面$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$上求平行于平面$3x+2y-4z=0$的直母线.

20. 求与直线$\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$与$\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$相交，而且与平面 2x+3y-5=0 平行的直线的轨迹.

21. 求与下列三条直线$\begin{cases}x=1,\\ y=z\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\ y=-z\end{cases}$与$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}$都共面的直线所构成的曲面。

22. 试求单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$上互相垂直的两直母线交点的轨迹方程.

23. 已知空间两异面直线间的距离为$2a$，夹角为2θ，过这两直线分别作平面，并使这两平面互相垂直，求这样的两平面交线的轨迹.

24. 已知圆柱面的轴为$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-z}=\frac{z+1}{-2}$,点（1，-2, 1） 在此圆柱面上，求这个圆柱面的方程。

25. 试求通过三条平行直线l_1： $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}$, l_2： $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$,
l_3： $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$的圆柱面方程.

26. 求与两个球面$x^2+y^2+z^2=16$与$x^2+(y-8)^2+z^2=1$都相切的圆锥面方程.

27. 在直角坐标系下，求关于三坐标面对称，且通过两曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{18}=1 \\ z=4 \end{cases}$ 与

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y}{48}=1 \\ z=-6; \end{cases}$ 的二次曲面的方程.

四. 证明题

1.已知柱面的准线为 $r(u)=\{x(u), y(u), z(u)\}$,母线的方向平行于向量 $s=\{X, Y, Z\}$,试证明:柱面的向量式参数方程与坐标式参数方程分别为 $r=r(u)+vs$,与 $\begin{cases} x=x(u)+Xv, \\ y=y(u)+Yv, \\ z=z(u)+Zv \end{cases}$,式中 u, v 为参数.

2. 证明下列方程表示的曲面是柱面：(1) $(x-z)^2+(y+z-a)^2=a^2$;

(2) $(x+y)(y+z)=x+2y+z$; (3) $x^2+y^2+z^2+2xz-1=0.$

3. 证明曲面 $F(\frac{x}{l}-\frac{y}{m},\frac{y}{m}-\frac{z}{n},\frac{z}{n}-\frac{x}{l})=0$ 是一个柱面，它的母线平行于直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

4．已知锥面的准线为 $r(u)=\{x(u),y(u),z(u)\}$，顶点 A 决定的向径为 $r_0=\{x_0,y_0,z_0\}$，试证明锥面的向量式参数方程与坐标式参数方程为

$r=vr(u)+(1-v)r_0$ 与 $\begin{cases} x=vx(u)+(1-v)x_0, \\ y=vy(u)+(1-v)y_0, \\ z=vz(u)+(1-v)z_0, \end{cases}$ 式中的 u,v 为参数.

5. 由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的中心（即圆点），沿某一定方向到曲面上的一点的距离是 r ，设定方向的方向余弦分别为 $\lambda,\mu,\nu,$ 试证：$\frac{1}{r^2}=\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}.$

6. 由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的中心，引三条两两相互垂直的射线，分别交曲面于点 $P_1,P_2,P_3,$ 设 $OP_1=r_1,OP_2=r_2,OP_3=r_3,$ 试求：$\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$

7. 设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是 l 与 m 的公垂线的中点，A,B 两点分别在直线 l， m 上滑动，且 $\angle ACB=90^\circ$，试证直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

8. 试验证单叶双曲面与双叶双曲面的参数方程分别为：$\begin{cases} x = a\sec u\cos v \\ y = b\sec u\sin v \\ z = ctgu \end{cases}$ 与

$\begin{cases} x = atgu\cos v \\ y = btgu\sin v \\ z = c\sec u \end{cases}$.

9. 试验证椭圆抛物面与双曲抛物面的参数方程可写为$\begin{cases} x = au\cos v, \\ y = bu\sin v, \\ z = \dfrac{1}{2}u^2 \end{cases}$ 与

$\begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(a-v), \\ z = 2uv, \end{cases}$ 式中 u，v 为参数.

10. 试证单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$的任意一条直母线在 xoy 平面上的射影，一定是腰椭圆切线.

11. 试证明经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线的一条直母线. 并举一反例，说明这个命题在双曲抛物面的情况下不一定成立.

12. 试证明双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ （$a\neq 0$）上的两直母线直交时，其交点必在一双曲线上.

13. 证明方程 $5x^2+5y^2+2z^2-8xy-2xy-2yz+20x+20y-40z-16=0$ 表示的曲面是一个柱面.

第五章　二次曲线的一般理论

一. 填空题

1. 二次曲线(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 矩阵 $A=$____________; F_1(x, y)=____________________;

F_2(x, y)= ________________; $F_3(x,y):=$________________.

2. 二次曲线 $3x^2+4xy+2y^2-6x-2y+5=0$ 的渐近方向为________________，且是___________________曲线.

3. 二次曲线 $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$ 是____________________曲线.

4. 二次曲线 $x^2-4xy+4y^2+2x-2y-1=0$ 是___________________曲线.

5. 二次曲线 $2y^2+8x+12y-3=0$ 是_________________曲线.

6. 二次曲线 $5x^2-2xy+3y^2-2x+3y-6=0$ 的中心为__________________.

7. 二次曲线 $6x^2-xy-y^2+3x+y-1=0$ 的渐近线为__________________________.

8. 曲线 $3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0$ 在点 $(2,1)$ 处的切线方程为___________________.

9. 曲线 $x^2+4xy+3y^2-5x-6y+3=0$ 的切线平行于直线 $x+4y=0$，则曲线的切线方程为__________________________;切点的坐标为___________________.

10. 二次曲线 $2xy+y^2-2x-1=0$ 的奇异点为__________________.

11. 二次曲线 $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$ 与 x 轴平行的弦的中点轨迹_______.

12. 通过点（2, 3），（4, 2），（-1，-3）且以点（0, 1）为中心的二次曲线方程为______________________.

13. 曲线 $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$ 通过点 $(8,0)$ 的直径方程为__________________.

14. 已知曲线 $xy-y^2-2x+3y-1=0$ 的直径与 y 轴平行，则这直径的共轭直径为______________________________.

15. 两条二次曲线 $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y=0$ 与 $2x^2-3xy-y^2+3x+2y=0$ 的公共直径为______________________________.

16. 椭圆 $\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的主方向______________、________________.

17. 抛物线 $y^2=2px$ 的主直径为________________________.

18. 二次曲线 $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ 的主方向为__________、________.

19. 二次曲线 $2xy-2x+2y-1=0$ 的主方向为_____________、________________.

20. 二次曲线 $9x^2-24xy+16y^2-18x-101y+19=0$ 的主直径_________________.

21．以二次曲线的主直径为新坐标轴化简方程 $8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0$，则相应的简化方程为_________________________________.

22. 利用不变量求二次曲线 $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$ 的简化方程____________.

23. 利用不变量求二次曲线 $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$ 的简化方程___________________.

24. 利用不变量求二次曲线 $x^2-4xy+4y^2+2x-2y-1=0$ 的简化方程_____________________.

25. 当 $\lambda=$______________时，方程 $\lambda x^2+4xy+y^2-4x-2y-3=0$ 表示两条直线.

26. 当 $\lambda=$_______________时，方程 $\lambda x^2+2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$ 表示抛物线.

二. 选择题

1. 二次曲线 $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$ 的渐近方向为（　）

A. 1:1　　B. 1:2
C. 2:1　　D. 1:-1

2. 二次曲线 $9x^2-6xy+y^2-6x+2y=0$ 是（　）曲线

A. 中心曲线　　B. 线心曲线
C. 无心曲线　　D. 不确定

3. 二次曲线 $2x^2+5xy+2y^2-6x-3y+5=0$ 的中心为(　)

A. (-1, 2)　　B. (1, -2)
C. (2, -1)　　D. (-2, 1)

4. 二次曲线 $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$ 的渐近线为(　)

A. $x+y-1=0$　　B. $x-y+1=0$

C. $x+y+1=0$　　D. $x-y-1=0$

5. 曲线$5x^2+7xy+y^2-x+2y=0$在原点处的切线方程为(　　)

A. $x+2y=0$　　　　B. $x-2y=0$

C. $2y-x+1=0$　　　　D. $x-2y-1=0$

6. 曲线 $x^2+xy+y^2=0$ 的切线平行于 X 坐标轴时切点的坐标为(　)

A. (-1,2);(1,2)　　　　B. (1, -2);(1,2)

C. (-1,2);(1,-2)　　　　D. (1, -2);(-1,-2)

7. 二次曲线$3x^2-2y^2+6x+4y+1=0$的奇异点为(　)

A. (-1,1)　　　　B. (1, 1)

C. (1,-1)　　　　D. (-1,-1)

8. 二次曲线$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$与 y 轴平行的弦的中点轨迹(　)

A. $7x+10y-5=0$　　　　B. $7x-10y-5=0$

C. $7x+10y+5=0$　　　　D. $7x-10y+5=0$

9. 已知曲线$xy-y^2-2x+3y-1=0$的直径与 y 轴平行，则它的方程为(　)

A. y=1　　　　B. x=2

C. y=2　　　　D. x=1

10. 两条二次曲线$x^2-xy-y^2-x-y=0$与$x^2+2xy+y^2-x+y=0.$的公共直径为(　　)

A. $5x+5y-2=0$　　　　B. $5x-5y+2=0$

C. $5x+5y+2=0$　　　　D. $5x-5y-2=0$

11. 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的主方向为(　　)

A. 1:0;0:1　　　　B. 1:1;0:1

C. 1:1;1:1　　　　D. 1:2;1:1

12. 以二次曲线的主直径为新坐标轴化简方程$4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$，则其最简形式为(　)

A. $y'^2=\dfrac{1}{5}$　　　　B. $y'^2=5$

C. $y'^2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　　　D. $y'^2=\sqrt{5}$

13. 利用不变量判断二次曲线$x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$为(　　)

A. 圆　　　　B. 椭圆

C. 双曲线　　　　　　　　　　　　D. 抛物线

14. 利用不变量判断二次曲线$3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$为(　　)

A. 圆　　　　　　　　　　　　　B. 椭圆

C. 双曲线　　　　　　　　　　　D. 抛物线

15. 利用不变量判断二次曲线$x^2-4xy+4y^2+2x-2y-1=0$为(　　)

A. 圆　　　　　　　　　　　　　B. 椭圆

C. 双曲线　　　　　　　　　　　D. 抛物线

16. 当λ为何值时，方程$\lambda x^2+2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$表示一对相交直线(　　)

A. $\lambda=-\frac{1}{5}$　　　　　　　　　　B. $\lambda=-\frac{3}{5}$

C. $\lambda=\frac{1}{5}$　　　　　　　　　　D. $\lambda=\frac{3}{5}$

三. 解答题

1. 写出下列二次曲线的矩阵A以及$F_1(\mathrm{x},\mathrm{y})$，$F_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$，$F_3(x,y)$：

(1)$y^2=2px$;　　　　　　　　(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. 求二次曲线$x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$与下列直线的交点：

⑴ 5x-y-5=o;　　　　⑵ x+2y+2=0;

⑶ x+4y-1=0;　　　　⑷ x-3y=0;

⑸ 2x-6y-9=0

3. 求直线 $x-y-1=0$ 与二次曲线 $2x^2-xy-y^2-x-2y=0$ 的交点.

4.试决定k的值，使得

(1) 直线$x-y+5=0$与二次曲线$x^2-3x+y+k=0$交于两个不同的实点；

(2) 直线$\begin{cases} x=1+kt \\ y=k+t \end{cases}$,与二次曲线$x^2+3y^2-4xy-y=0$交于一点；

(3) 直线$x-ky-1=0$与二次曲线$y^2-2xy-(k-1)y-1=0$交于两个相互重合的定点；

(4) 直线$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \end{cases}$，与二次曲线$2x^2+4xy+ky^2-x-2y=0$有两个共轭虚交点.

5.求二次曲线 $2xy-4x-2y+3=0$. 的渐近方向,并指出曲线是属于何种类型的曲线.

6.求下列二次曲线的中心：

(1)$9x^2-30xy+25y^2+8x-15y=0$

(2)$4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$.

7. 当 a,b 满足什么条件时，二次曲线 $x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$

（1） 有唯一的中心；（2）没有中心；（3）有一条中心直线.

8.求二次曲线$x^2-3xy+2y^2+x-3y+4=0$的渐近线.

9. 试求曲线 $3x^2+10xy+7y^2+4x+2y+1=0$的渐近线.

10．求通过点$(1,1),(2,1),(-1,-2)$且以直线 x+y-1=0 为渐进线的曲线方程.

11. 曲线$x^2+xy+y^2+x+4y+3=0$经过点$(-2,-1)$处的切线方程.

12. 曲线 $5x^2+6xy+5y^2=8$ 经过点 $(0,2\sqrt{2})$ 处的切线方程.

13. 曲线 $2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$ 经过点 $(0,2)$ 处的切线方程.

14.求二次曲线 $F(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-4y-3=0$ 在点（2,1）处的切线与法线方程.

15. 试求椭圆的两条垂直相交的切线交点的轨迹。

16. 求曲线 $x^2+xy+y^2=0$ 的切线平行于 y 坐标轴的切线方程及切点的坐标.

17．求二次曲线 $x^2-2xy+y^2-2x+2y+1=0$ 的奇异点.

18．试求经过原点且切直线 $4x+3y+2=0$ 于点 $(1,-2)$ 及切直线 $x-y-1=0$ 于点 $(0,-1)$ 的二次曲线方程.

19．设有共焦点的曲线族 $\dfrac{x^2}{a^2+h}+\dfrac{y^2}{b^2+h}=1$，这里 h 是一个变动的参数，作平行于已知直线 $y=mx$ 的曲线的切线，求这些切线切点的轨迹方程.

20. 求二次曲线 $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$ 直线 $x+y+1=0$ 平行的弦的中点轨迹.

21. 求通过点（1，-1）且两直线 $2x+3y-5=0$ 与 $5x+3y-8=0$ 为其渐近线的二次曲线的方程.

22. 求通过点（3，-3），（3，-7）且以两直线 $x-y-10=0$与$x+y+6=0$ 为一对共轭直径的二次曲线的方程.

23. 求曲线 $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$ 通过点 $(8,0)$ 的共轭直径方程.

24．已知抛物线 $y^2=-8x$ ，通过点 $(-1,1)$ 引一弦，使它在这点被平分.

25.求双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$ 的一对共轭直径 12 方程,已知两共轭直径间的角是 45^0.

26．已知二次曲线通过原点，并且以下列两对直线

$\begin{cases}x-3y-2=0\\5x-5y-4=0\end{cases}$与$\begin{cases}5y+3=0\\2x-y-1=0\end{cases}$，为它的两对共轭直径，求这二次曲线的方程.

27．求双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的主直径.

28. 求椭圆$\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的主直径.

29.求抛物线$y^2=2px$的主方向.

30. 求二次曲线$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$的主直径.

31.求二次曲线$2xy-2x+2y-1=0$的主直径.

32.求二次曲线$9x^2-24xy+16y^2-18x-101y+19=0$的主方向.

33. 求二次曲线$x^2+y^2+4x-2y+1=0$的主方向与主直径.

34. 直线$\mathrm{x}+\mathrm{y}+1=0$是二次曲线的主直径（即对称轴），点$(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,1)$在曲线上，求这曲线的方程.

35. 利用移轴与转轴，化简二次曲线$5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$的方程，并画出它的图形.

36. 利用移轴与转轴，化简二次曲线 $x^2+2xy+y^2-4x+y-1=0$ 的方程，并画出它的图形.

37. 利用移轴与转轴，化简二次曲线 $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$ 的方程，并画出它的图形.

38. 利用移轴与转轴，化简二次曲线 $x^2+2xy+y^2+2x+2y=0$ 的方程，并画出它的图形.

39．以二次曲线的主直径为新坐标轴化简方程 $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$ ，并写出相应的坐标变换公式.

40. 以二次曲线的主直径为新坐标轴化简方程 $4x^2-4xy+y^2+6x-8y+3=0$ ，并写出相应的坐标变换公式.

41. 化简二次曲线方程: $x^2+2xy+y^2+y=0$.

42. 利用不变量判断二次曲线 $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$ 为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

43. 利用不变量判断二次曲线 $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+29=0$ 为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

44. 利用不变量判断二次曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

45. 利用不变量判断二次曲线 $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$ 为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

46. 利用不变量判断二次曲线 $4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$ 为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

47.按 λ 实数的值讨论方程 $\lambda x^2+2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$ 表示什么曲线？

四. 证明题

1.试证明：如果二次曲线$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$有渐进线，那么它的两渐近方程是

$$
\begin{aligned}
&\Phi(x-x_0,y-y_0)\\
&\equiv a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2\\
&=0
\end{aligned}
$$

式中(x_0,y_0)为二次曲线的中心.

2．试证二次曲线成为线心曲线的充要条件是$I_2=I_3=0,$成为无心曲线的充要条件是$I_2=0,I_3\neq 0.$

3．证明以直线$A_1x+By+C_1=0$为渐近线的二次曲线方程总能写成

（$A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C)+D=0$.

4. 试证：通过中心二次曲线中心的直线，一定是中心二次曲线的直径。平行于无心二次曲线渐近方向的直线，一定是无心二次曲线的直径.

5．试证明二次曲线两不同特征根确定的主方向相互垂直.

6. 试证中心二次曲线 $ax^2+2hxy+ay^2=d$ 的两条主直径为 $x^2-y^2=0$,曲线的两半轴的长分别是 $\sqrt{\left|\frac{d}{a+h}\right|}$及$\sqrt{\left|\frac{d}{a-h}\right|}$.

7. 设$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$表示两条平行直线, 证明这两条直线之间的距离是$d=\sqrt{-\frac{4\mathrm{K}_1}{\mathrm{I}_1^2}}$.

8. 试证方程$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$确定一个实圆必须且需$\mathrm{I}_1^2=4\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_1\mathrm{I}_3<0$.

9. 试证如果二次曲线的$\mathrm{I}_1=0$，那么$\mathrm{I}_2\prec 0$.

10. 试证如果二次曲线的$\mathrm{I}_2=0$，$\mathrm{I}_{,3}\neq 0$,那么$\mathrm{I}_1\neq 0$，而且$\mathrm{I}_1\mathrm{I}_3\prec 0$.