第四章　矩阵

教学的时间：2020 年　月　日　　　　教学学时数:1 学时

4.1 矩阵的概念的一些背景

一、教学目标

了解矩阵概念产生的背景

二、教学重点

矩阵概念产生的背景

三、教学难点

让学生理解矩阵的应用广泛

四、教学过程

线性方程组的一些重要性质反映在它的系数矩阵和增广矩阵的性质上,并且解线性方程组的过程也表现为变换这些矩阵的过程.除了线性方程组之外，还有大量的各种各样的问题也都提出矩阵的概念，并且这些问题的研究常常反映为有关矩阵的某些方面的研究，甚至于有些性质完全不同的、表面上完全没有联系的问题，归结成矩阵问题以后却是相同的.这使矩阵成为数学中一个极其重要的应用广泛的概念，因而也就使矩阵成为代数特别是线性代数的一个主要研究对象.

1. 在解析几何中考虑坐标变换时，如果只考虑坐标系的转轴(反时针方向转轴)，那么平面直角坐标变换的公式为

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases} \tag{1}$$

其中θ为x轴与x'轴的夹角.显然新旧坐标之间的关系，完全通过公式中系数所排成的2×2矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

表示出来.通常，矩阵(2)称为坐标变换(1)的矩阵.在空间的情形，保持原点不动的仿射坐标系的变换有公式

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{cases} \tag{3}$$

同样，矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

就称为坐标变换(3)的矩阵.

2. 二次曲线的一般方程为

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \tag{5}$$

(5)的左端可以简单地用矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \tag{6}$$

来表示.通常，(6)称为二次曲线(5)的矩阵.以后我们会看到，这种表示法不只是形式的.

3. 在讨论国民经济的数学问题中也常常用到矩阵.例如，某三家房地产企业，2018 年四个季度的销售额用矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

来表示，其中 aij 表示第 i 家企业第 j 季度的销售额.

4. n 维向量也可以看成矩阵的特殊情形. n 维行向量就是 $1\times n$ 矩阵，n 维列向量就是 $n\times 1$ 矩阵.

以后用大写的拉丁字母 $A, B, \cdots$，或者

$$(a_{ij}), (b_{ij}), \cdots$$

来表示矩阵.

有时候，为了指明所讨论的矩阵的级数，可以把 $s\times n$ 矩阵写成 $A_{sn}, B_{sn}, \cdots$，或者

$$(a_{ij})_{sn}, (b_{ij})_{sn}, \cdots$$

(注意矩阵符号与行列式的符号的区别).

设 $A = (a_{ij})_{mn}, (b_{ij})_{lk}$ ，如果 $m = l, n = k$ ，且 $a_{ij} = b_{ij}$ ，对 $i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$ 都成立，

我们就说 $A=B$.即只有完全一样的矩阵才叫做相等.

五、小结

1. 你能举矩阵的例子吗？

2. 如何定义矩阵相等?

3. 自己下去思考矩阵在解线性方程组中的有作用哪些作用？

六、作业（见习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:3 学时**

4.2 矩阵的运算

一、教学目标

掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置等运算规律及其计算

二、教学重点

矩阵的加法、数乘、乘法、转置等运算规律及其计算

三、教学难点

矩阵的数乘、乘法的运算规律及其计算

四、教学过程

1. 加法

定义 1 设

$$A=\left(a_{ij}\right)_{sn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

$$B=\left(b_{ij}\right)_{sn}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

是两个$s\times n$矩阵，则矩阵

$$C=\left(c_{ij}\right)_{sn}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{sn}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}$$

称为A和B的和，记为

$$C=A+B.$$

矩阵的加法就是矩阵对应的元素相加.当然，相加的矩阵必须要有相同的行数和列数.由于矩阵的加法归结为它们的元素的加法，也就是数的加法，所以不难验证，它有

结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$；

交换律：$A+B=B+A$.

元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为O_{sn}，在不致引起含混的时候，可简单地记为O. 显然，对所有的A，

$$A+O=A.$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的负矩阵，记为$-A$.显然有

$$A+(-A)=O$$

矩阵的减法定义为

$$A-B=A+(-B)$$

例如 在§1我们看到，某一种物资如果有s个产地，n个销地，那么一个调动方案就可表示为一个$s\times n$矩阵.矩阵中的元素a_{ij}表示由产地A_i要运到销地B_j的这个物资的数量，比如说吨数.如果从这些产地还有另一个物资要运到这些销地，那么，这种物资的调动方案也可以表示为一个矩阵.于是从产地到销地的总的运输量也可以表示为一个$s\times n$矩阵.显然，这个矩阵就等于上面两个矩阵的和.

根据矩阵加法的定义应用关于向量组的秩的性质，很容易看出：

$$秩(A+B)\leqslant 秩(A)+秩(B)$$

2. 乘法

在给出乘法定义之前，先看一个引出矩阵问题.

引例 总收入与总利润问题

设某地有甲、乙、丙三个工厂，每个工厂都生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 4种产品. 已知每个工厂的年产量(单位:个) 如下表所示:

产品 / 工厂	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

已知每种产品的单价（万元/个 ）和单位利润(万元/个）如下表所示:

产品＼项目	单价	利润
Ⅰ	10	2
Ⅱ	15	4.5
Ⅲ	30	12
Ⅳ	20	6

求各工厂的总收入与总利润.

解 容易算出各工厂的总收入与总利润，列表如下：

工厂＼项目	总收入	总利润
甲	1850	565
乙	2800	1035
丙	1975	677.5

本例中的三个表格可用三个矩阵表示，设

$$A=\begin{pmatrix}20&30&10&45\\15&10&70&20\\20&15&35&25\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}10&2\\15&4.5\\30&12\\20&6\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1850&565\\2800&1035\\1975&677.5\end{pmatrix},$$

记 $A=(a_{ij})_{3\times4}$，$B=(b_{ij})_{4\times2}$，$C=(c_{ij})_{3\times2}$，则 $c_{ij}=?$，$i=1,2,3$，$j=1,2$.

定义 2 设

$$A=(a_{ik})_{sn}，B=(b_{kj})_{nm},$$

那么矩阵

$$C=(c_{ij})_{sm},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, \tag{6}$$

称为矩阵 A 与 B 的乘积，记为

$$C=AB.$$

由矩阵乘法的定义可以看出，矩阵A与B的乘积C的第i行第j列的元素等于第一个矩阵A的第i行与第二个矩阵B的第j列的对应元素的乘积的和.当然，在乘积的定义中，我们要求第二个矩阵的行数与第一个矩阵的列数相等.

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{pmatrix},$$

那么

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2&-1\\9&9&11\end{pmatrix}.$$

例 3 如果

$$A=\left(a_{ij}\right)_{sn}$$

是一线性方程组的系数矩阵，而

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_s\end{pmatrix}$$

分别是未知量和常数项所成的$n\times1$和$s\times1$矩阵，那么线性方程组就可以写成矩阵的等式

$$AX=B.$$

例 3 在空间中作一坐标系的转轴.设由坐标系(x_1,y_1,z_1)到(x_2,y_2,z_2)的坐标变换的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

如果令

$$X_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix},$$

那么坐标变换的公式可以写成

$$X_1=AX_2.$$

如果再作一次坐标系的转轴，设由第二个坐标系(x_2, y_2, z_2)到第三个坐标系(x_3, y_3, z_3)的坐标变换公式为

$$X_2 = BX_3,$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

那么不难看出，由第一个坐标系到第三个坐标系的坐标变换的矩阵即为

$$C = AB.$$

矩阵的乘法适合结合律.设

$$A = (a_{ij})_{sn}, \ B = (b_{jk})_{nm}, C = (c_{kl})_{mr}$$

则

$$(AB)C = A(BC).$$

证：$A = (a_{ij})_{sn}$　　$B = (b_{jk})_{nm}$　　$C = (c_{kl})_{mr}$

令　$V = AB = (v_{ik})_{sm}$，　$W = BC = (w_{jl})_{nr}$

其中　$v_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$，　$w_{jl} = \sum_{k=1}^{m} b_{jk} c_{kl}$

VC的第i行第j列元素为$\sum_{k=1}^{m} v_{ik} c_{kl} = \cdots = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}$，

AW的第i行第j列元素为$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_{jl} = \cdots = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}$.

即，VC的第i行第j列元素等于AW的第i行第j列元素.

所以　$(AB)C = A(B$.

但是矩阵的乘法不适合交换律，即一般说来

$$AB \neq BA.$$

例如，设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

而

$$BA=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

由这个例子我们还可看出，两个不为零的矩阵的乘积可以是零，这是矩阵乘法的一个特点.由此还可得出矩阵消去律不成立.即当 $AB=AC$ 时,不一定有 $B=C$.

定义 3 主对角线上的元素全是 1，其余元素全是 0 的 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

称为 n 级单位矩阵，记为 E_n，或者在不致引起含混的时候简单写为 E.显然有

$$A_{sn}E_n=A_{sn},$$

$$E_sA_{sn}=A_{sn}.$$

矩阵的乘法和加法还适合分配律，即

$$A(B+C)=AB+AC, \tag{9}$$

$$(B+C)A=BA+BC. \tag{10}$$

应该指出，由于矩阵的适合交换律，所以(9)与(10)是两条不同的规律.

我们还可以定义矩阵的方幂.设 A 是一 $n\times n$ 矩阵，定义

$$\begin{cases}A^1=A,\\A^{k+1}=A^kA.\end{cases}$$

换句话说，A^k 就是 k 个 A 连乘.当然只能对行数与列数相等的矩阵来定义.由乘法的结合律，不难证明

$$A^kA^l=A^{k+l},$$

$$(A^k)^l=A^{kl}.$$

这里 k,l 是任意正整数.因为矩阵乘法不适合交换律，所以 $(AB)^k$ 与 A^kB^k 一般不相等.

3. 数量乘法

. **定义 4** 矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 与数 k 的数量乘积，记为 kA.换句话说，用数 k 乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘上 k.

数量乘积适合以下的规律：

$$(k+l)A = kA = lA, \tag{11}$$

$$k(A+B) = kA + kB, \tag{12}$$

$$k(lA) = (kl)A, \tag{13}$$

$$1A = A, \tag{14}$$

$$k(AB) = (kA)B = A(kB). \tag{15}$$

矩阵

$$kE = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

通常称为数量矩阵.作为(15)的特殊情形，如果 A 是一 $n\times n$ 矩阵，那么有

$$kA = (kE)A = A(kE).$$

这个式子说明，数量矩阵与所有的 $n\times n$ 矩阵作乘法是可交换的.可以证明：如果一个 n 级矩阵与所有 n 级矩阵作乘法是可交换的，那么这个矩阵一定是数量矩阵.再有

$$kE + lE = (k+l)E,$$

$$(kE)(lE) = (kl)E,$$

这就是说，数量矩阵的加法与乘法完全归结为数的加法与乘法.

若 A 为 n 级方阵，$|kA| = k^n|A|$.

4. 转置

把一矩阵 A 的行列互换，所得到的矩阵称为 A 的转置，记为 A'.可确切地定义如下：

定义 5 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

所谓的**转置**就是指矩阵

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

显然，$s\times n$矩阵的转置是$n\times s$矩阵.

矩阵的转置适合以下的规律：

$$(A')'=A, \tag{16}$$

$$(A+B)'=A'+B', \tag{17}$$

$$(AB)'=B'A', \tag{18}$$

$$(kA)'=kA'. \tag{19}$$

(16)表示两次转置就还原，这是显然的.

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求$(AB)'$, $B'A'$.

对称矩阵 反对称矩阵

定义：设A为n级方阵，若A满足

1）$A'=A$，则称A为对称矩阵.

2）$A'=-A$，则称A为反对称矩阵.

性质：

① 对称矩阵的和、差仍是对称矩阵.

反对称矩阵的和、差仍是对称矩阵.

即，A,B对称$\Rightarrow A+B, A-B$仍对称.

A,B反对称$\Rightarrow A+B, A-B$仍反对称.

② A对称，$k\in P\Rightarrow kA$仍对称.

A反对称，$k\in P\Rightarrow kA$反对称.

③ 奇数级反对称矩阵的行列式等于零.

证：$A'=-A, |A'|=|-A|=(-1)^n|A|$，$n$ 为奇数，则 $|A|=-|A|$　　$\therefore |A|=0$

④　A,B 对称，AB 未必对称．$\because (AB)'=B'A'=BA$

A,B 反对称，AB 未必反对称．$\because (AB)'=B'A'=(-B)(-A)=BA$

⑤　A,B 对称，AB 对称 $\Leftrightarrow AB=BA.$

⑥　A 为任意级方阵，则

$A+A'$ 为对称矩阵，$A-A'$ 为反对称矩阵；

A 可表为对称矩阵与反对称矩阵之和．$A=\dfrac{1}{2}(A+A')+\dfrac{1}{2}(A-A')$

例 5　A 反对称，B 对称．证明：

1）A^2 对称．

2）$AB-BA$ 对称；$AB+BA$ 反对称．

3）AB 反对称 $\Leftrightarrow AB=BA$．

证：1）$(A^2)'=(AA)'=A'A'=(-A)(-A)=A^2$

2）$(AB-BA)'=(AB)'-(BA)'=B'A'-A'B'=B(-A)-(-A)B=AB-BA$

3）“$\Rightarrow$”AB 反对称 $\Rightarrow AB=-(AB)'=-B'A'=-B(-A)=BA$

“$\Leftarrow$”$(AB)'=B'A'=B(-A)=-BA=-AB$，AB. 反对称．

例 6　A 为 n 级实对称矩阵，且 $A^2=0$，证明：$A=0$．

证：设 $A=(a_{ij})_{nn}.\because A'=A\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}a^2_{ik}=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$

$\Rightarrow a_{ik}=0,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad k=1,2,\cdots,n$．

$\therefore\quad A=0.$

五、小结

1. 你学会了矩阵哪几种运算，它们分别怎么运算？

2. 矩阵的乘法如何计算？两个矩阵的乘积有没有条件？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年　月　日　　　　　　　　教学学时数:2 学时

4.3 矩阵乘积的行列式与秩

一、教学目标

1. 掌握矩阵乘积的行列式定理。
2. 理解矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系。

二、教学重点

矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系

三、教学难点

矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系

四、教学过程

定理 1 设 A,B 是数域 P 上的两个 $n\times n$ 矩阵，那么

$$|AB|=|A||B|, \tag{1}$$

即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积.

由§4.3 定理 7，P93

$$|A||B|=\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & 0 \end{vmatrix}=|AB|(-1)^n(-1)^{1+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}=|AB|(-1)^n(-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}}=|AB|$$

用数学归纳法，定理 1 可以推广到多个因子的情形，即有

推论 1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵，于是

$$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|$$

定义 6 数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵 A 称为非退化的，如果 $|A|\neq 0$，否则称为退化的.

显然一 $n\times n$ 矩阵是非退化的充要条件是它的秩等于 n.

推论 2 设 A,B 是数域 P 上 $n\times n$ 矩阵，矩阵 AB 为退化的充要条件是 A,B 中至少有一个是退化的.

证明 “$\Rightarrow$”：因 AB 非退化，$|AB|=|A||B|\neq 0\ \Rightarrow |A|\neq 0,\ |B|\neq 0, \therefore A,B$ 所以都非退化；

“$\Leftarrow$”设 A,B 都非退化，则 $|A|\neq 0,\ |B|\neq 0, \Rightarrow |AB|=|A||B|\neq 0$，$\therefore\ AB$ 非退化.

定理 2 设 A 是数域 P 上 $n\times m$ 矩阵，B 是数域 P 上 $m\times s$ 矩阵，于是

$$\text{秩}(AB) \le \min[\text{秩}(A), \text{秩}(B)], \qquad (2)$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

证明： 设 $A=(a_{ij})_{nm}, B=(b_{ij})_{ms}$， $AB=(c_{ij})_{ns}$.

设 B 的行向量为 $B_1, B_2, \cdots, B_m$， C 的行向量为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，

由 $AB=C$，先证 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 可由 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 线性表示，

$$AB=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{im}b_{m1} & a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22}+\cdots+a_{im}b_{m2} & \cdots & a_{i1}b_{1s}+a_{i2}b_{2s}+\cdots+a_{im}b_{ms} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$ 其中

AB 的第 i 行元素为：

$$a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1s})+a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2s})+\cdots+a_{im}(b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{ms})=a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+\cdots+a_{im}B_m$$

$i=1,2,\cdots,n$， 即 C 的行向量 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 可由 B 的行向量 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 线性表示所以 $R(C) \le R(B)$.

平行的，设 A 的列向量为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$， C 的列向量为 $C_1, C_2, \cdots, C_s$，则

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{mj} & \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vdots & a_{11}b_{1j}+a_{12}b_{2j}+\cdots+a_{1m}b_{mj} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{n1}b_{1j}+a_{n2}b_{2j}+\cdots a_{nm}b_{mj} & \vdots \end{pmatrix}$$

$$=b_{1j}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+b_{2j}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}+\cdots+b_{mj}\begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}=b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+b_{mj}A_m$$

即 C 的列向量 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 可由 A 的列向量 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 线性表示，从而 $R(C) \le R(A)$，

故 $R(C) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

用数学归纳法，定理 2 可以推广到多个因子的情形，即有

推论 3 如果 $A=A_1A_2\cdots A_t$，那么

$$\text{秩}(A) \le \min_{1\le j\le t}(\text{秩}A_j).$$

五、小结

1. 请叙述矩阵乘积的行列式与先求矩阵的行列式再求乘积的关系。
2. 矩阵退化与非退化的判别方法。
3. 请叙述矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系。

七、教学反思

教学的时间：2020 年　月　　日　　　　　　　　　　　教学学时数:2 学时

4.4 矩阵的逆

一、教学目标

1. 理解可逆矩阵、逆矩阵、伴随矩阵等概念。
2. 掌握一个 n 阶方阵可逆的充要条件和用公式法求一个矩阵的逆矩阵。

二、教学重点

伴随矩阵的概念、用公式法求一个矩阵的逆矩阵

三、教学难点

用公式法求一个矩阵的逆矩阵

四、教学过程

（一）、可逆矩阵的概念

在§2 我们看到，矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算. 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢？这就是本节所要讨论的问题.

这一节矩阵，如不特别声明，都是 $n\times n$ 矩阵.

对于任意的级方阵 A 都有

$$AE=EA=A$$

这里 E 是 n 级单位矩阵. 因之，从乘法的角度来看，n 级单位矩阵在级方阵中的地位类似于 1 在复数中的地位. 一个复数 $a\neq 0$ 的倒数可以用等式

$$aa^{-1}=1$$

来刻划，相仿地，我们引入

定义 7 n 级方阵 A 称为可逆的，如果有 n 级方阵 B，使得

$$AB=BA=E, \tag{1}$$

这里 E 是 n 级单位矩阵.

首先我们指出，由于矩阵的乘法规则，只有方阵才能满足(1). 其次，对于任意的矩阵 A，适合等式(1)的矩阵 B 是唯一的(如果有的话).

设 B_1,B_2 均为 A 的逆，则 $A\cdot B_1=B_1\cdot A=E$，且 $A\cdot B_2=B_2\cdot A=E$，从而有：

$$B_1=B_1E=B_1(AB_2)=(B_1A)B_2=EB_2=B_2.$$

定义 8 如果矩阵 B 适合(1)，那么 B 就称为 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}.

（二）、可逆矩阵的逆矩阵的求法

下面要解决的问题是：在什么条件下矩阵A是可逆的？如果A可逆，怎样求A^{-1}？

定义 9 设A_{ij}是矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中元素a_{ij}的代数余子式，矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵.

例 1　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，则 $A^{\bullet}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

由行列式按一行(列)展开的公式立即得出：

$$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}=dE, \tag{2}$$

其中$d=|A|$.

如果$d=|A|\neq 0$，那么由(2)得

$$A(\frac{1}{d}A^*)=(\frac{1}{d}A^*)A=E. \tag{3}$$

定理 3 矩阵A可逆的充要条件是A非退化的，而

$$A^{-1}=\frac{1}{d}A^* \qquad (d=|A|\neq 0)$$

证明：“$\Rightarrow$”：因A可逆，则$\left|AA^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}\right|=|E|=1\neq 0$，$\Rightarrow |A|\neq 0$，

“$\Leftarrow$”：设$|A|\neq 0$，由　$AA^{\bullet}=A^{\bullet}A=|A|E$，

$A(\frac{1}{|A|}A^{\bullet})=(\frac{1}{|A|}A^{\bullet})A=E$，$\Rightarrow$矩阵$A$可逆，且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

例 2． $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$， $|A|=1$， $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$.

一般地，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，可逆$\Leftrightarrow|ad-bc|\neq 0$.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$$

例 3． $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$， 则 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=2$，

$$A^{\bullet}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix},\qquad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}.$$

例 4． $D=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}$，$a_i\neq 0$，$i=1,\cdots,n$，则 $D^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-1}&&&\\&a_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^{-1}\end{pmatrix}$.

则 $|D|=a_1a_1\cdots a_n$，

$$D^{\bullet}=\begin{pmatrix}a_2\cdots a_n&0&\cdots&0\\0&a_1a_3\cdots a_n&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_1\cdots a_{n-1}\end{pmatrix},\quad \Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-1}&&&\\&a_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^{-1}\end{pmatrix}.$$

根据定理 3 容易看出，对于n级方阵A,B，如果

$$AB=E$$

那么A,B就都是可逆的并且它们互为逆矩阵.

证： $AB=E\Rightarrow|A||B|=1\Rightarrow|A|\neq 0$，$|B|\neq 0\Rightarrow A,B$可逆.

$A^{-1}(AB)=A^{-1}E\Rightarrow B=A^{-1}$，$(AB)B^{-1}=EB^{-1}\Rightarrow A=B^{-1}$.

定理 3 不但给出了一矩阵可逆的条件，同时也给出了求逆矩阵的公式(4). 按这个公式来求逆矩阵，计算量一般是非常大的. 在以后我们将给出另一种求法.

由(5)可以看出，如果$|A|=d\neq 0$，那么

$$|A^{-1}|=d^{-1}$$

（三）、逆矩阵的运算规律

1） A可逆$\Rightarrow A^{-1}$可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$.

2） A可逆，$\lambda\neq 0\Rightarrow \lambda A$可逆，且$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

3） A、B为n级可逆方阵$\Rightarrow AB$可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

因 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=(AE)A^{-1}==AA^{-1}=E$，

$\Rightarrow AB$可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

4） A可逆$\Rightarrow A'$可逆，且$(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

因A可逆，则 $(A')(A^{-1})'=(A^{-1}A)'=E'=E$， $\Rightarrow A'$可逆，且$(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

5） A可逆$\Rightarrow A^*$可逆，且$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$，

因A可逆，则$(\dfrac{1}{|A|}A^{\bullet})A=E$，$\Rightarrow A^{\bullet}(\dfrac{1}{|A|}A)=E$，$\Rightarrow A^*$可逆，且$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$.

6） A可逆$\Rightarrow A^k$可逆，且$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k\overset{\Delta}{=}A^{-k}$.

因A可逆，则$A^k(A^{-1})^k=(AA^{-1})^k=E^k=E\Rightarrow A^k$可逆，且$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k\overset{\Delta}{=}A^{-k}$.

（注：当$|A|\neq 0$时，定义$A^0=E$，$A^{-k}=(A^{-1})^k$，则$A^kA^l=A^{k+l}$，$(A^k)^l=A^{kl}$）

注意：A、B可逆，$A+B$未必可逆.

例 5. 设方阵A满足$A^2-3A-10E=0$，证明：A，$A-4E$都可逆，并求它们的逆矩阵.

证：由$A^2-3A-10E=0$，得$A(A-3E)=10E$，即得$A\left[\dfrac{1}{10}(A-3E)\right]=E$，

故A可逆，且$A^{-1}=\dfrac{1}{10}(A-3E)$.

再由$A^2-3A-10E=0$，得$A^2-4A+A-4E=6E\Rightarrow A(A-4E)+E(A-4E)=6E$，

$\Rightarrow (A+E)(A-4E)=6E$，即 $\dfrac{1}{6}(A+E)(A-4E)=E$，

故$A-4E$可逆，且$(A-4E)^{-1}=\dfrac{1}{6}(A+E)$.

例 6. 证明：若$|A|=0$，则$|A^*|=0$

证：$\because AA^*=|A|E\ \therefore AA^*=0$； 当$A=0$时，$A^*=0$，$\therefore |A^*|=0$

当$A\neq 0$时，反设$|A^*|\neq 0$，则A^*可逆. 由$AA^*=0$，有$(AA^*)(A^*)^{-1}=0$，即$A=0$，矛盾，$\therefore |A^*|=0$.

（四）、矩阵方程

A为n阶可逆矩阵，若B为$n\times s$矩阵，且$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$为$n\times s$矩阵；

若 B 为 $s\times n$ 矩阵，且 $XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}$ 为 $s\times n$ 矩阵；

A,B 分别为 n,s 阶可逆矩阵，若 C 为 $n\times s$ 矩阵，且 $AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$ 为 $n\times s$ 矩阵.

例 7．$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$，求 X .

解：$X=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$.

例 8．$A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，$AB=A+2B$，求 B .

解：由 $AB=A+2B$，得 $(A-2E)B=A$，又 $|A-2E|=\begin{vmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=2\neq0$，

$\therefore A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&3\\-1&1&3\\1&1&-1\end{pmatrix}$，

$\therefore B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$.

例 9．Cramer 法则另一种简捷的推导

给 $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$，可改写为矩阵形式：$AX=B$，（6）

其中 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_n\end{pmatrix}$

当系数行列式 $D=|A|\neq0$ 时，A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

将 $X=A^{-1}B$ 代入（6）有恒等式 $AA^{-1}B=B$，即 $X=A^{-1}B$ 是（6）的一个解

若 $X=C$ 是（6）的一个解，则 $AC=B,\Rightarrow A^{-1}AC=A^{-1}B,\Rightarrow C=A^{-1}B$，故

$X=A^{-1}B$ 是（6）的唯一解，由 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，有

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}A^{\bullet}B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_j = \dfrac{1}{|A|}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}) = \dfrac{D_j}{D}, \quad j = 1,2,\cdots,n.$ 得证 Cramer 法则：

若（6）的系数矩阵 A 的行列式 $D = |A| \neq 0$，则方程组（6）有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ \ x_2 = \frac{D_2}{D},\cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}.$$

（五）、矩阵乘积的秩

定理 4：$\forall A_{s\times n}$，若 $P_{s\times s}$，$Q_{n\times n}$ 可逆，则 $R(A) = R(PA) = R(AQ) = R(PAQ)$．即**可逆矩阵不改变矩阵的秩.**

证：令 $B = PA$，又 $P^{-1}B = A$，由定理 2，$\left.\begin{matrix} R(B) \le R(A) \\ R(A) \le R(B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow R(A) = R(B)$

五、小结

1. 叙述可逆矩阵、逆矩阵、伴随矩阵等概念。
2. 如何判断一个 n 阶方阵可逆的充要条件？
3. 用公式法求一个矩阵的逆矩阵你学会了吗？怎么求？。

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:2 学时**

4.5 矩阵的分块

一、教学目标

1. 理解分块矩阵的意义。
2. 掌握分块矩阵的加法、乘法的运算及性质。

二、教学重点

分块矩阵的加法、乘法的运算及性质

三、教学难点

分块矩阵的乘法的运算及性质

四、教学过程

介绍一个处理级数较高的矩阵时常用的方法，即矩阵的分块.有时候，我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，就如矩阵是由数组成的一样.特别在运算中，把这些小矩阵当作数一样来处理.这就是所谓矩阵的分块.

设 $A=(a_{ij})_{mn}$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} = \triangleq (A_{kl})_{s\times t} \quad , \qquad A_{ij}\text{ 为子块}$$

特殊分块：**按行分块** $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}$，其中 $A_i=(a_{i1}\cdots a_{in})$，

按列分块 $A=\left(B_1,B_2,\cdots B_t\right)$，其中 $B_j=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$

为了说明这个方法，下面看一个例子.在矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & O \\ A_1 & E_2 \end{pmatrix}$$

中，E_2 表示级单位矩阵，而

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

在矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

中，

$$B_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix},B_{12}=\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix},B_{21}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix},B_{22}=\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}.$$

在计算 AB 时，把 A,B 都看成是由这些小矩阵组成的，即按 2 级矩阵来运算.于是

$$AB=\begin{pmatrix}E_2&O\\A_1&E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1B_{12}+B_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$A_1B_{12}+B_{22}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\5&3\end{pmatrix}.$$

因之

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\-2&4&1&1\\-1&1&5&3\end{pmatrix}.$$

不难验证，直接按 4 级矩阵乘积的定义来作，结果是一样的.

一般，设 $A=(a_{ik})_{sn}$，$B=(b_{kj})_{nm}$，把 A,B 分成一些小矩阵

$$A=\begin{array}{c}\\ s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_t\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}n_1&n_2&\cdots&n_l\end{array}\\ \begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1l}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{t1}&A_{t2}&\cdots&A_{tl}\end{pmatrix}\end{array},\tag{1}$$

$$B=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2}$$

其中每个 A_{ij} 是 $s_i \times n_j$ 小矩阵，每个 B_{ij} 是 $n_i \times m_j$ 小矩阵，于是有

$$C=AB=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3}$$

其中

$$C_{pq}=A_{p1}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{pl}B_{lq}=\sum_{k=1}^{l}A_{pk}B_{kq}\,(p=1,2,\cdots,t;q=1,2,\cdots,r). \tag{4}$$

这个结果是由矩阵乘积的定义直接验证即得.

应该注意，在分块(1),(2)中矩阵的列的分法必须与矩阵的行的分法一致.

以下会看到，分块乘法有许多方便之处.常常在分块之后，矩阵间相互的关系看得更清楚.

实际上，在证明关于矩阵乘积的秩的定理时，已经用了矩阵分块的想法.在那里，用 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 表示 B 的行向量，于是

$$B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix},$$

这就是 B 的一种分块.按分块相乘，就有

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1m}B_m \\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2m}B_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}B_1+a_{n2}B_2+\cdots+a_{nm}B_m \end{pmatrix}.$$

用这个式子很容易看出 AB 的行向量是 B 的行向量的线性组合；将 AB 进行另一种分块乘法，从结果中可以看出 AB 的列向量是 A 的列向量的线性组合.

例 1. 求矩阵

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

的逆矩阵，其中A,B分别是k级和r级的可逆矩阵，C是$r\times k$矩阵，O是$k\times r$零矩阵.

证明 因为

$$|D|=|A||B|,$$

所以当A,B可逆时，D也可逆.设

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_r \end{pmatrix},$$

这里E_k,E_r分别表示k级和r级单位矩阵.乘出来并比较等式两边，得

$$\begin{cases} AX_{11}=E_k\ , \\ AX_{12}=O, \\ CX_{11}+BX_{21}=O, \\ CX_{12}+BX_{22}=E_r\,. \end{cases}$$

由第一、二式得

$$X_{11}=A^{-1},X_{12}=A^{-1}O=O,$$

代入第四式，得

$$X_{22}=B^{-1},$$

代入第三式，得

$$BX_{21}=-CX_{11}=-CA^{-1}\ ,\ X_{21}=-B^{-1}CA^{-1}.$$

因此

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

特别地，当$C=O$时，有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

形式为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中a_i是数$(i=1,2,\cdots,l)$，通常称为对角矩阵，而形式为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中A_i是$n_i \times n_i$矩阵$(i=1,2,\cdots,l)$，通常称为准对角矩阵.当然，准对角矩阵包括对角矩阵作为特殊情形.

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & & & O \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_l \end{pmatrix},$$

如果它们相应的分块是同级的，那么显然有

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & O \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_lB_l \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & O \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l+B_l \end{pmatrix}$$

它们还是准对角矩阵.

其次，如果$A_1,A_2,\cdots,A_l$都是可逆矩阵，那么

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 2．A、B 为 n 级方阵，证明，若 $AB=0$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

证：$AB=0\Rightarrow A\left(B_1,B_2,\cdots B_n\right)=0\Rightarrow\left(AB_1,AB_2,\cdots AB_n\right)=0$

$\Rightarrow AB_i=0,i=1,2,\cdots n$. 即 B 的每一列向量皆为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量.

$\therefore$ 向量组 $B_1,B_2,\cdots B_n$ 的秩 $\le AX=0$ 的基础解系所含向量个数.

即，秩 $(B_1,B_2,\cdots B_n)\le n-R(A)\Rightarrow R(B)\le n-R(A)\Rightarrow R(A)+R(B)\le n$

例 3．已知 3 级方阵 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且 $|A|=5$．若 $B=(\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2)$，求 $|B|$.

解：$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{pmatrix}$

法 1：$\therefore |B|=|A|\begin{vmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{vmatrix}=5\cdot(-20)=-100$

法 2：
$$\begin{aligned}|B|&=|\alpha_1,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2|+|2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2|\\&=|\alpha_1,3\alpha_1,5\alpha_2|+|\alpha_1,4\alpha_3,5\alpha_2|=20|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2|\\&=-20|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=-20|A|=-100.\end{aligned}$$

附：　一些特殊分块矩阵的乘积

$AX=B$，　$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\beta$，　$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$A_{m\times n}$，　$(A_1,A_2,\cdots A_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1A_1,\lambda_2A_2,\cdots,\lambda_nA_n)$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1A_1\\\lambda_2A_2\\\vdots\\\lambda_mA_m\end{pmatrix}$$

例 4： $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}

解： $\because (5)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$， $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&1\end{pmatrix}$， $\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$.

例 5． A 为 3 阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$， $B=2\begin{pmatrix}(3A)^{-1}-2A^{*}&0\\0&A\end{pmatrix}$，求 $|B|$

解： $|B|=2^6\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right||A|$

$$=2^6\left|((3A)^{-1}-2A^{*})A\right|=2^6\left|\frac{1}{3}A^{-1}A-2A^{*}A\right|$$

$$=2^6\left|\frac{1}{3}E-2\cdot\frac{1}{2}E\right|=2^6\left|-\frac{2}{3}E\right|=2^6\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{5}{2}$$

五、小结

1. 矩阵进行分块的运算有没有好处?体现在哪些地方?

2. 矩阵分块的乘法需要注意什么？

七、教学反思

教学的时间：2020 年　月　日　　　　**教学学时数:2 学时**

4.6 初等矩阵

一、教学目标

1. 理解和掌握初等矩阵、初等变换等概念及其它们之间的关系。
2. 熟练掌握一个矩阵的等价标准形和矩阵可逆的充要条件。
3. 会用初等变换的方法求一个方阵的逆矩阵。

二、教学重点

1. 一个矩阵的等价标准形和矩阵可逆的充要条件。
2. 用初等变换的方法求一个方阵的逆矩阵。

三、教学难点

用初等变换的方法求一个方阵的逆矩阵。

四、教学过程

（一）初等矩阵的定义

定义 10 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

显然，初等矩阵都是方阵，每个初等矩阵都有一个与之相应的初等矩阵.互换矩阵 E 的 i 行与 j 行的位置，得

$$P(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&&&\\&&&&1&&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&&&1&&&\\&&&1&\cdots&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\i\text{行}\\\\,\\\\j\text{行}\\\\\\\\\end{array}$$

用数域 P 中非零数 c 乘 E 的 i 行，有

$$P(i(c))=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&c&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\\ \\ \\ i\text{行},\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

把矩阵 E 的 j 行的 k 倍加到 i 行，有

$$P(i,j(k))=\begin{array}{cl}\begin{array}{ccccccc}&&i\text{列}&&j\text{列}&&\end{array}&\\ \begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\\ \\ i\text{行}\\ ,\\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

同样可以得到与列变换相应的初等矩阵.应该指出，对单位矩阵作一次初等列变换所得的矩阵也包括在上面所列举的这三类矩阵之中.譬如说，把 E 的 i 列的 k 倍加到 j 列，我们仍然得到 $P(i,j(k))$.因之，这三类矩阵就是全部的初等矩阵.

（二）初等矩阵的性质

引理 对一个 $s\times n$ 矩阵 A 作一初等行变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 $s\times s$ 初等矩阵；对 A 作一初等列变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 $n\times n$ 的初等矩阵.

$p(i,j)\ A$： 对换 A 的 i ,j 两行； $A\ p(i,j)$： 对换 A 的 i ,j 两列.

$p(i(k))\ A$：用非零数 k 乘 A 的第 i 列； $A\ p(i(k))$：用非零数 k 乘 A 的第 i 列.

$p(i,j(k))\ A$： A 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行； $A\ p(i,j(k))$： A 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列.

不难看出，初等矩阵都是可逆的，它们的逆矩阵还是初等矩阵.事实上

(三)两个矩阵的等价关系

在第二章 § 5 我们看到，用初等行变换可以化简矩阵.如果同时用行与列的初等变换，那么矩阵还可以进一步化简.

定义 11 矩阵 A 与 B 称为等价的，如果 B 可以由 A 经过一系列初等变换得到.

等价是矩阵间的一种关系.不难证明，它具有反身性、对称性与传递性.

定理 5 任意一个$s\times n$矩阵A都与一形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵等价，它称为矩阵A的标准形，1 的个数等于A的秩(1 的个数可以是零).

例 1 用初等变换将下列矩阵化为标准形，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

根据引理，对一矩阵作初等变换就相当于用相应的初等矩阵去乘这个矩阵.因之，矩阵A,B等价的充要条件是有初等矩阵$P_1,\cdots,P_l,Q_1,\cdots,Q_t$使

$$A=P_1P_2\cdots P_lBQ_1Q_2\cdots Q_t\,. \tag{1}$$

n级可逆矩阵的秩为n，所以可逆矩阵的标准形为单位矩阵；反过来显然也是对的.

定理 6 n级矩阵A为可逆的充要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积：

$$A=Q_1Q_2\cdots Q_m\,. \tag{2}$$

推论 1 两个$s\times n$矩阵A,B等价的充要条件为，存在可逆的s级矩阵P与可逆的n级矩阵Q使

$$A=PAQ\,.$$

把(2)改写一下，有

$$Q_m^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}A=E\,. \tag{3}$$

因为初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵，同时在矩阵A的左边乘初等矩阵就相当于对A作初等行变换，所以(3)说明了

推论 2 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵.

以上的讨论提供了一个求逆矩阵的方法.设A是一n级可逆矩阵.由推论 2，有一系列初等矩阵$P_1,\cdots,P_m$使

$$P_m \cdots P_1 A = E, \tag{4}$$

由(4)即得

$$A^{-1} = P_m \cdots P_1 = P_m \cdots P_1 E. \tag{5}$$

(4)，(5)两个式子说明，如果用一系列初等行变换把可逆矩阵A化成单位矩阵，那么同样地用这一系列初等行变换去化单位矩阵，就得到A^{-1}.

把A,E这两个$n\times n$矩阵凑在一起，作成一个$n\times 2n$矩阵

$$(A \quad E),$$

按矩阵的分块乘法，(4)，(5)可以合并写成

$$P_m \cdots P_1 (A \quad E) = (P_m \cdots P_1 A \quad P_m \cdots P_1 E) = (E \quad A^{-1}). \tag{6}$$

(6)式提供了一个具体求逆矩阵的方法.作$n\times 2n$矩阵$(A \quad E)$，用初等行变换把它的左边一半化成E，这时，右边的一半就是A^{-1}.

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

求A^{-1}.（ $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ）

当然，同样可以证明，可逆矩阵也能用初等列变换化成单位矩阵，这就给出了用初等列变换求逆矩阵的方法.

（四）用初等变换解矩阵方阵

$AX=B$，A可逆，$X=A^{-1}$B．$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots A^{-1}B)$

$XA=B$，A可逆，$X=$BA^{-1}．$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$

例 3．$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，$AX=B$，求$X$．

解：$(A\vdots B)\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}.\therefore X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}$.

例 4. $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$. $XA=B$，求 X .

解：$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}.\therefore X=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}$

五、小结

1. 请叙述初等矩阵与初等变换的关系。

2. 一个矩阵的等价标准形和矩阵可逆的充要条件。

3. 用初等变换的方法求一个方阵的逆矩阵。

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:2 学时**

4.7 分块乘法的初等变换及其应用举例

一、教学目标

1. 理解分块乘法的初等变换。
2. 会求分块矩阵的逆。

二、教学重点

分块乘法的初等变换

三、教学难点

分块乘法的初等变换

四、教学过程

（一）分块初等矩阵

将分块乘法与初等变换结合就成为矩阵运算中极端重要的手段.

现设某个单位矩阵如下进行分块：

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}.$$

对它进行两行(列)对换；某一行(列)左乘(右乘)一个矩阵 P；一行(列)加上另一行(列)的 P (矩阵)倍数，就可得到如下类型的一些矩阵：

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix},\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}.$$

和初等矩阵与初等变换的关系一样，用这些矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的变换：

$$\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

同样，用它们右乘任一矩阵，进行分块乘法时也有相应的结果.

在(3)中，适当选择P，可使$C+PA=O$.例如A可逆时，选$P=-CA^{-1}$，则$C+PA=O$. 于是(3)的右端成为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

这种形状的矩阵在求行列式、逆矩阵和解决其它问题时是比较方便的，因此(3)中的运算非常有用.

（二）应用举例

例 1 设

$$T=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix},$$

A,D可逆，求T^{-1}.

解：由$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$，有

$$T^{-1}=\left[\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

例 2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix}$，$A_1^{-1}=\frac{1}{2}A_1$

解：$\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2A_1 & 0 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2A_1 & 0 \\ 0 & -A_1 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1}=\left[\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2A_1 & 0 \\ 0 & -A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}^{-1}\right]^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_1^{-1} & 0 \\ 0 & -A_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E & 0\\ E & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}A_1 & 0\\ A_1 & -\frac{1}{2}A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & E\\ 0 & E\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}A_1 & \frac{1}{4}A_1\\ \frac{1}{4}A_1 & -\frac{1}{4}A_1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A$$

例 3 设

$$T_1=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

其中T_1,D可逆，试证$(A-BD^{-1}C)^{-1}$存在，并求T_1^{-1}.

例 4 证明行列式的乘积公式$|AB|=|A||B|$.

证： $\begin{pmatrix}E_n & A\\ 0 & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ -E & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & AB\\ -E & B\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}E_n & A\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{pmatrix}=P_{11}\cdots P_{1n}\cdots P_{n1}\cdots P_{nn}E$$

$$=P_{11}\cdots P_{1n}\cdots P_{n1}\cdots P_{nn}\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & E_n\end{pmatrix}$$

其中初等矩阵$P_{ij}=\begin{pmatrix}E_n & \overline{E_{ij}}\\ 0 & E_n\end{pmatrix}$，$\overline{E_{ij}}$为除（i, j）元素为$a_{ij}$外，其余元素皆为 0.

$$\left|\begin{pmatrix}E_n & A\\ 0 & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ -E & B\end{pmatrix}\right|=\left|P_{11}\cdots P_{1n}\cdots P_{n1}\cdots P_{nn}\begin{pmatrix}A & 0\\ -E & B\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}A & 0\\ -E & B\end{pmatrix}\right|=|A||B|$$

$$\left|\begin{pmatrix}0 & AB\\ -E & B\end{pmatrix}\right|=(-1)^n\begin{vmatrix}AB & 0\\ B & -E\end{vmatrix}=(-1)^n|AB||-E|=|AB|$$

$\therefore\ |AB|=|A||B|$.

例 5 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, 1 \le k \le n,$$

则有下三角形矩阵 $B_{n\times n}$ 使

$$BA = \text{上三角形矩阵}.$$

证明：存在下三角矩阵 B_{n*n}，使 BA 为上三角形.

证：对 n 作归纳法.

当 n=1 时，$A=(a_{11}), \forall B=(b_{11}), BA=(a_{11}b_{11})$ 为上三角形.

假设对 n－1 级矩阵命题成立，即，对 $A_1=(a_{ij})_{(n-1)*(n-1)}$ 结论成立，于是存在 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵 B_1，满足：B_1A_1 为上三角形．下面考虑 n 级矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$．

对 A 作分块 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-2,n} \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}$，$\alpha=(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,n-1})$

则 $$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\partial A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \partial & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ 0 & a_{nn}-\partial A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ 0 & a_{nn}-\partial A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\beta \\ 0 & a_{nn}-\partial A_1^{-1}\beta \end{pmatrix}=\text{上三角形}.$$

五、小结

1. 分块初等矩阵有哪几类？在一个矩阵左边和右边乘分块初等矩阵的作用分别是什么？
2. 分块的上、下三角矩阵的逆矩阵怎么求？

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:4 学时**

第四章 矩阵习题讲解

教学学时数:4 学时

（习题册以及教材上的课后习题）