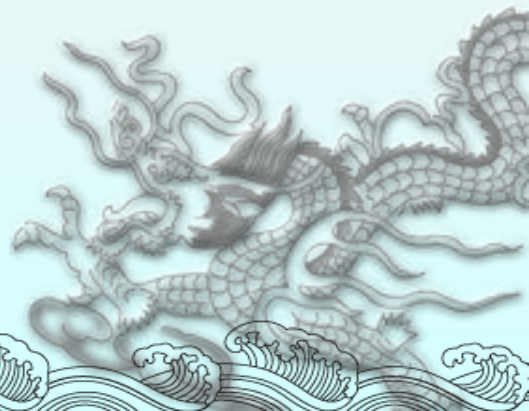


5.2 二次曲线的渐近方向、中心、渐近线



二次
曲线

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

与直线

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \end{cases} \quad (2) \quad \text{的交点.}$$

$$\Phi(X, Y) \cdot t^2 + 2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0 \quad (4)$$

当 $\Phi(X, Y) = 0$ 时

$$2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

$$2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

1° $F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y \neq 0$. 此时 (4) 是关于 t 的一次方程, 直线 (2) 与二次曲线 (1) 有唯一实交点.

2° $F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y = 0$. 而 $F(x_0, y_0) \neq 0$. (4) 是矛盾方程, 直线 (2) 与二次曲线 (1) 无交点.

3° $F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y = F(x_0, y_0) = 0$. 此时 (4) 是恒等式, 直线 (2) 全部在二次曲线 (1) 上.

一. 二次曲线的渐近方向

定义5.2.1 满足条件 $\phi(X, Y) = 0$ 的方向 $X:Y$ 叫做二次曲线的渐近方向，否则叫做非渐近方向。

任一二次曲线至多有二个渐近方向，具体地

(i) 当 $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$ 时，曲线有一对共轭的虚渐近方向；

(ii) 当 $I_2 < 0$ 时，曲线有二不同实渐近方向；

(iii) 当 $I_2 = 0$ 时，曲线有二相同实渐近方向。

二次曲线的非渐近方向有无数个。

一. 二次曲线的渐近方向

定义5.2.2 定义 没有实渐近方向的二次曲线叫做**椭圆型**的，有一个实渐近方向的二次曲线叫做**抛物线型**的，有两个实渐近方向的二次曲线叫做**双曲型**的。

即

1) 椭圆型: $I_2 > 0$

2) 抛物型: $I_2 = 0$

3) 双曲型: $I_2 < 0$

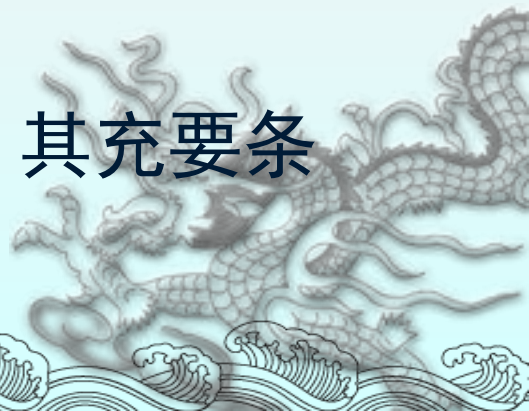
二. 二次曲线的中心与渐近线

定义5.2.3 如果点C是二次曲线的通过它的所有弦的中点(因而C是二次曲线的对称中心), 那么点C叫做二次曲线的中心.

定理5.2.1 点 $C(x_0, y_0)$ 是二次曲线(1)的中心, 其充要条件是:

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ F_2(x_0, y_0) \equiv a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (5.2-1)$$

推论 坐标原点是二次曲线的中心, 其充要条件是曲线方程里不含 x 与 y 的一次项.



二次曲线(1)的中心坐标由下方程组决定：

$$\begin{cases} F_1(x, y) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ F_2(x, y) \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (5.2-2)$$

如果 $I_2 \neq 0$ ，则 (5.2-2) 有唯一解，即为唯一中心坐标

如果 $I_2 = 0$ ，分两种情况：

当 $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$ 时，(5.2-2) 无解，没有中心。

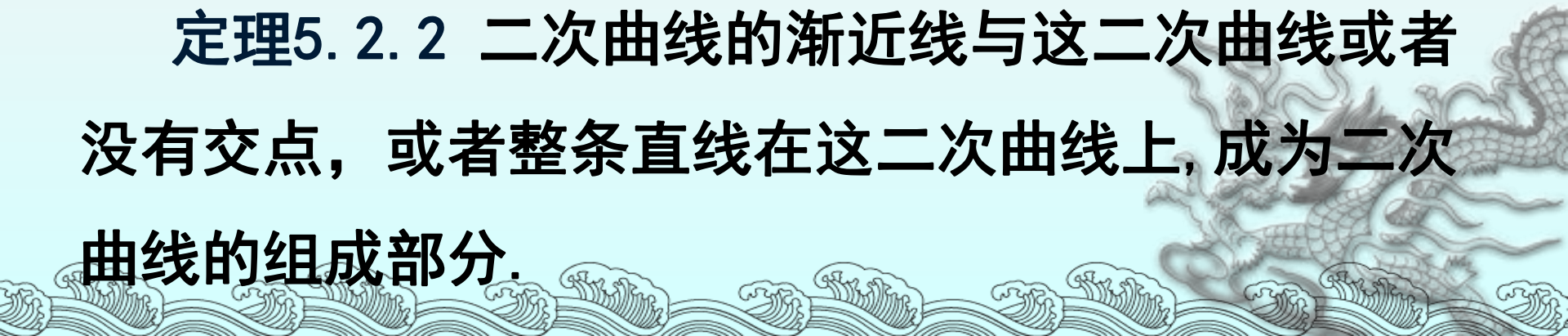
当 $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ 时，(5.2-2) 无数多解，直线上所有

点都是二次曲线的中心，这条直线叫中心直线。

定义5.2.4 有唯一中心的二次曲线叫**中心二次曲线**，没有中心的二次曲线叫**无心二次曲线**，有一条中心直线的二次曲线叫**线心二次曲线**，无心二次曲线和线心二次曲线统称为**非中心二次曲线**.

定义5.2.5 通过二次曲线的中心，而且以渐近方向为方向的直线叫做二次曲线的**渐近线**.

定理5.2.2 二次曲线的渐近线与这二次曲线或者没有交点，或者整条直线在这二次曲线上，成为二次曲线的组成部分.



二次曲线的渐近线讨论

1) 椭圆型曲线: $I_2 > 0$ 没有实渐近方向从而没有实渐近线, (或称有一对共轭相交虚渐近线)

2) 双曲型曲线: $I_2 < 0$ 有一对实渐近线

3) 抛物型曲线: $I_2 = 0$ $I_3 \neq 0$ 曲线没有中心,

从而没有渐近线; $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ 曲线为线心, 渐近线就是中心直线.

