第三章 平面与空间直线

典型题解

解答题

1. 证明两直线$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-8}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$与$\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-6}{4}$异面，并求出它们之间的距离.

解：这两直线的方向向量分别为$\overrightarrow{v_1}=\{3,-3,4\}$，$\overrightarrow{v_2}=\{-3,2,4\}$，在其上各取点$M_1\{3,8,3\}$，$M_2\{-3,-7,6\}$，所以有$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-6,-15,3\}$，

因为

$$\Delta=\begin{vmatrix}-6 & -15 & 3\\ 3 & -3 & 4\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & -3 & 4\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 11 & -17 & 0\\ -6 & 5 & 0\end{vmatrix}=-3\times(-1)\times157=471\neq0,$$

所以两直线异面.

又 $$\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\left\{\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}\right\}=\{-20,-24,-3\}$$

从而两异面直线之间的距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|}$$

$$=\frac{471}{\sqrt{20^2+24^2+3^2}}=\frac{471}{\sqrt{985}}.$$

2. 求异面直线$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{-1}$和$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-7}{1}$间的距离和它们的公垂线方程.

解：直线$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{-1}$的方向向量为$\overrightarrow{v_1}=\{1,0,-1\}$，在其上取点$M_1\{-2,0,2\}$，

直线$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-7}{1}$的方向向量为$\overrightarrow{v_2}=\{1,5,1\}$，在其上取点$M_2\{3,-2,7\}$，从而$\overrightarrow{M_1M_2}=\{5,-2,5\}$，$\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|=\left\{\begin{vmatrix}0 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 5\end{vmatrix}\right\}=\{5,-2,5\}$

所以　两异面直线之间的距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}5 & -2 & 5\\1 & 0 & -1\\1 & 5 & 1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{25+25+4}}=\frac{54}{\sqrt{54}}=\sqrt{54}.$$

其公垂线方程为
$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x+2 & y & z-2\\1 & 0 & -1\\5 & -2 & 5\end{vmatrix}=0,\\ \begin{vmatrix}x-3 & y+2 & z-7\\1 & 5 & 1\\5 & -2 & 5\end{vmatrix}=0\end{cases},$$

化简整理为
$$\begin{cases}x+5y+z=0,\\x-z+4=0.\end{cases}$$

3. 化直线$\begin{cases}x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}$为标准方程.

解：令$z=0$，得直线上的点为（－5，7，0）
直线的方向向量为:

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\1 & -1 & -4\\2 & 1 & -2\end{vmatrix}=\{6,\quad -6,\quad 3\}$$

故直线的标准方程为$\frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z}{1}$.

4. 设平面通过原点O和点$M(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解：设$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\{6,-3,2\}$, 则平面$4x-y+2z=8$的法向量

$$\vec{n}=\{4,-1,2\}\text{与}\vec{a}=\{6,-3,2\}.$$

均平行于所求平面，又 O在平面上，于是所求平面的点位式方程为

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\6 & -3 & 2\\4 & -1 & 2\end{vmatrix}=0,$$

整理得$2x+2y-3z=0$.

5. 已知平面通过两点$M(3,-2,5)$及$N(2,3,1)$且平行于z轴，求平面方程.

解：设平面方程为：$A(x-3)+B(y+2)=0$

由于过 N 点，得 $A(2-3)+B(3+2)=0$

$A:B=5:1$， 故平面方程为：$5(x-3)+(y+2)=0$

即 $5x+y-13=0$.

6. 试求直线$\begin{cases} x+2y+3z-6=0 \\ 2x+3y-4z-1=0 \end{cases}$的对称式方程和参数方程.

解：令 $z=0$，得$\begin{cases} x+2y-6=0 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases}$，解得

$x=-16, y=11$，得直线上一点 $P_0(-16,11,0)$ 。

直线方向向量为$\vec{S}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=\{-17,10,-1\}$，

故直线对称式方程为 $\dfrac{x+16}{-17}=\dfrac{y-11}{10}=\dfrac{z}{-1}$.

参数方程为 $\begin{cases} x=-16-17t \\ y=11+10t \\ z=-t \end{cases}$.

7. 试用两种方法求过点 $M_0(0,0,-2)$，与平面 $\Pi_1: 3x-y+2z-1=0$ 平行，且与直线 $l_1: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线 l 的方程.

解：设 l 与 l_1 的交点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，因为 M_2 在 l_1 上，又 $\overrightarrow{M_1M_2}\mathbin{//}\Pi_1$，所以有

$$\begin{cases} \dfrac{x_2-1}{4}=\dfrac{y_2-3}{-2}=\dfrac{z_2}{1}, \\ 3(x_2-0)-(y_2-0)+2(z_2+2)=0. \end{cases}$$

解之，得 M_2 的坐标为 $(0,\dfrac{7}{2},-\dfrac{1}{4})$，

因此 l 的方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{\frac{2}{7}}=\frac{z+2}{-\frac{1}{4}+2},\text{即}\qquad \frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}.$$

8. 求通过点 $M_1(3,1,-1)$ 和点 $M_2(1,-1,0)$ 且平行于矢量 $\{-1,0,2\}$ 的平面的坐标式参

数方程和一般方程.

解：$\because$ $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-2,-2,1\}$，又矢量$\{-1,0,2\}$平行于所求平面，故所求的平面方程为：

$$\begin{cases} x=3-2u-v \\ y=1-2u \\ z=-1+u+2v \end{cases}$$

一般方程为：$4x-3y+2z-7=0$.

9. 求通过点$M_1(1,-5,1)$和$M_2(3,2,-2)$且垂直于xoy坐标面的平面的坐标式参数方程和一般方程.

解：由于平面垂直于xoy面，所以它平行于z轴，即$\{0,0,1\}$与所求的平面平行，又$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,7,-3\}$，平行于所求的平面，所以要求的平面的参数方程为：

$$\begin{cases} x=1+2u \\ y=-5+7u \\ z=1-3u+v \end{cases}$$

一般方程为：$7(x-1)-2(y+5)=0$，即$7x-2y-17=0$.

10. 通过点$\mathrm{M}_1(2,-1,1)$和$\mathrm{M}_2(3,-2,1)$且分别平行于三坐标轴的三个平面的一般方程.

解:平行于x轴的平面方程为$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$. 即$z-1=0$. 同理可知平行于$y$轴, z轴的平面的方程分别为$z-1=0, x+y-1=0$.

11. 求过点$\mathrm{M}_1(3,-5,1)$和$\mathrm{M}_2(4,1,2)$且垂直于平面$x-8y+3z-1=0$的平面的一般方程.

解：平面$x-8y+3z-1=0$的法向量为$\vec{n}=\{1,-8,3\}$，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1,6,1\}$，点从$(4,1,2)$

写出平面的点位式方程为$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0$，则$A=\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-26,$

$B=\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=2, C=\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}=14, D=-26\times4+2+28=-74$，

则一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$, 即：$13x-y-7z-37=0.$

12. 过点 $\mathrm{M}(3,2,-4)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距分别为 -2 和 -3 的平面的一般方程.

解：设该平面的截距式方程为 $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{c}=1$，把点 $\mathrm{M}(3,2,-4)$ 代入得 $c=-\frac{24}{19}$, 故一般方程为 $12x+8y+19z+24=0$.

13. 求与平面 $5x+y-2z+3=0$ 垂直且通过 x 轴的平面的一般方程和法式方程.

解：$\because$ 平面经过 x 轴，则 $(0,0,0)$ 为平面内一个点,

$\{5,1,-2\}$ 和 $\{1,0,0\}$ 为所求平面的方位矢量,

$\therefore$ 点法式方程为 $\begin{vmatrix}x-0 & y-0 & z-0\\5 & 1 & -2\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$.

$\therefore$ 一般方程为 $2y+z=0$.

14. 将平面 $4x-4y+7z=0$ 化为法式方程.

解：$.\because D=0.\therefore\lambda=\frac{\pm1}{9}$. 即 $\lambda=\frac{1}{9}$ 或 $\lambda=-\frac{1}{9}$

将已知的一般方程乘上 $\lambda=\frac{1}{9}$ 或 $\lambda=-\frac{1}{9}$. 得法式方程为

$$\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}y+\frac{7}{9}z=0 \text{或} -\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}y-\frac{7}{9}z=0.$$

15. 求自坐标原点从平面 $.x-2y+2z+21=0$ 引垂线的长和指向平面的单位法矢量的方向余弦.

解：因为 $D=21.\lambda=-\frac{1}{3}$，化为法式方程为 $--\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-7=0$ 原点指向平面 π 的单位法矢量为 $n^0=\left\{-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}$, 它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

故原点 o 到平面 π 的距离 $p=-\lambda D=7$.

16. 已知三角形顶点 $A(0,-7,0),B(2,-1,1),C(2,2,2)$. 求平行于 ΔABC 所在的平面

且与它相距为 2 各单位的平面方程.

解: 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. 点 $A(0,-7,0)$. 则 $\vec{a}=\{2,6,1\},\vec{b}=\{2,9,2\}$ 写出平面的点位

式方程 $\begin{vmatrix} x & y+7 & z \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix}=0$, 设一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，

$A=3,B=2,C=6,D=-14<0$，则 $\lambda=\dfrac{1}{7}.p=-\lambda D=2.$

相距为 2 个单位。则当 $p=4$ 时 $D=-28.$ 当 $p=0$ 时 $D=0.$

$\therefore$ 所求平面为 $3x-2y+6z-28=0.$ 和 $3x-2y+6z=0.$

17. 平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 分别与三个坐标轴交于点 A,B,C. 求 ΔABC 的面积.

解： $A(a,0,0)$ ， $B(0,b,0)$ ， $C(0,0,c)$ ， $\overrightarrow{AB}=\{-a,b,0\}$ ， $\overrightarrow{AC}=\{-a,0,c\}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{bc,ca,ab\}$; $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$

18. 试求在 z 轴上且到点 $M(1,-2,0)$ 与到平面 $3x-2y+6z-9=0$ 距离相等的点.

解：设所求的点为 $(0,0,z_0)$ 则由题意知：

$$\sqrt{1^2+2^2+{z_0}^2}=\frac{|6z_0-9|}{7}$$

由此，$z_0=-2$ 或 $-\dfrac{82}{13}$. 故要求的点为 $(0,0,-2)$ 及 $(0,0,-\dfrac{82}{13})$.

19. 试求在 x 轴上且到平面 $12x-16y+15z+1=0$ 和 $2x+2y-z-1=0$ 距离相等的点.

解：设所求的点为 $(x_0,0,0)$，由题意知：

$$\frac{|12\times 0+1|}{25}=\frac{|2x_0-1|}{3}$$

由此解得：$x_0=2$ 或 $\dfrac{11}{43}$, 所求点即（2，0，0）及（$\dfrac{11}{43}$，0，0）.

20. 求通过 x 轴其与点 $M(5,4,13)$ 相距 8 个单位的平面方程.

解：设通过 x 轴的平面为 $By+Cz=0.$ 它与点 $M(5,4,13)$ 相距 8 个单位，从

而$\dfrac{|4B+13C|}{\sqrt{B^2+C^2}}=8.\therefore 48B^2-104BC-105C^2=0.$因此$(12B-35C)(4B+3C)=0.$

从而得$12B-35C=0$或$4B+3C=0.$于是有$B:C=35:12$或$B:C=3:(-4).$

21. 求与两平面$3x+6y-2z-7=0$和$4x-3y-5=0$距离相等的点的轨迹.

解：因为$\pi_1:\dfrac{1}{7}(3x+6y-2z-7)=0$

$$\pi_2:\frac{1}{5}(4x-3y-5)=0$$

令 $$\frac{1}{7}(3x+6y-2z-7)=\frac{1}{5}(4x-3y-5),$$

化简整理可得:$13x-51y+10z=0$与$43x+9y-10z-70=0$.

22. 试确定 l,m,n 的值：使 $(l-3)x+(m+1)y+(n-3)z+8=0$ 和 $(m+3)x+(n-9)y+(l-3)z-16=0$表示同一平面.

解：欲使所给的二方程表示同一平面，则:

$$\frac{l-3}{m+3}=\frac{m+1}{n-9}=\frac{n-3}{l-3}=\frac{8}{-16}$$

即：

$$\begin{cases} m+2l-3=0 \\ n+2m-7=0 \\ l+2n-9=0 \end{cases}$$

从而 $$l=\frac{7}{9},\quad m=\frac{13}{9},\quad n=\frac{37}{9}.$$

23. 求通过点$M_1(0,0,1)$和$M_2(3,0,0)$且与坐标面xOy成60^0角的平面方程.

解：设所求平面的方程为$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{1}=1.$

又 xoy 面的方程为 z=0, 所以$\cos 60^o=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{b}\cdot 0+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$

解得$b=\pm\dfrac{3}{\sqrt{20}}$, ∴所求平面的方程为$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{\pm\frac{3}{\sqrt{26}}}+z=1,$

即 $$x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0.$$

24. 求过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 60^0 角的平面方程.

解：设所求平面的方程为 $Ax+By=0$；则 $\cos 60^o=\dfrac{2A+B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{4+1+5}}=\dfrac{1}{2}$

$3A^2+8AB-3B^2=0, \therefore A=\dfrac{B}{3}$ 或 $A=-3B$

$\therefore$ 所求平面的方程为 $x+3y=0$ 或 $3x-y=0$.

25. 已知四点 $A(5,1,3)$，$B(1,6,2)$，$C(5,0,4)$ $D(4,0,6)$。求通过直线 AB 且平行于直线 CD 的平面，并求通过直线 AB 且与 ΔABC 平面垂直的平面.

解：设平面 π 通过直线 AB，且平行于直线 CD：

$\overrightarrow{AB}=\{-4,5,-1\}$，$\overrightarrow{CD}=\{-1,0,2\}$

从而 π 的参数方程为：

$$\begin{cases} x=5-4u-v \\ y=1+5u \\ z=3-u+2v \end{cases}$$

一般方程为：$10x+9y+5z-74=0$.

26. 化平面 $\pi: x+2y-z+4=0$ 为截距式与参数式.

解：π 与三个坐标轴的交点为：$(-4,0,0),(0-2,0),(0,0,4)$，

所以，它的截距式方程为：$\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=1$.

又与所给平面方程平行的矢量为：$\{4,-2,0\},\{4,0,4\}$，

$\therefore$ 所求平面的参数式方程为：

$$\begin{cases} x=-4+2u+v \\ y=-u \\ z=v \end{cases}.$$

27. 求通过点 $A(-3,0,1)$ 和点 $B(2,-5,1)$ 的直线方程.

解：由两点式得，所求的直线方程为：

$$\frac{x+3}{2+3}=\frac{y}{-5}=\frac{z-1}{0}$$

即：$\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{0}$，亦即 $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$.

28. 求通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行于两相交平面 π_i：$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$，

$(i=1,2)$ 的直线方程.

解：因为所求直线的方向向量为：

$$\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$$

所以，直线方程为：$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$.

29. 求通过点 $M(1,0,-2)$ 且与两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 和 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 垂直的直线方程.

解：因为所求直线的方向向量为：$\{1,1,-1\}\times\{1,-1,0\}=\{-1,-1,-2\}$，

所以，直线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

30. 求通过点 $M(2,-3,-5)$ 且与平面 $6x-3y-5z+2=0$ 垂直的直线方程.

解：因为所求的直线的方向向量为：$\{6,-3,-5\}$，

所以直线方程为：$\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$.

31. 求通过点 $M(1-5,3)$ 且与 x,y,z 三轴分别成 $60^\circ,45^\circ,120^\circ$ 的直线方程.

解：因为所求的直线的方向向量为：$\{\cos 60^\circ,\cos 45^\circ,\cos 120^\circ\}=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\right\}$，故直线方程为：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{\sqrt{2}}=\frac{z-3}{-1}.$$

32. 求关于直线 $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ 与点 $P(2,0,-1)$ 对称的点.

解：$\because$ 已知直线的方向向量为：$\{1,-1,-4\}\times\{2,1,-2\}=\{6,-6,3\}$，或为 $\{2,-2,1\}$，

$\therefore$ 过 P 垂直与已知直线的平面为：$2(x-2)-2y+(z+1)=0$，即 $2x-2y+z-3=0$，

该平面与已知直线的交点为 $(1,1,3)$，所以若令 $P'(x,y,z)$ 为 P 的对称点，则：

$$1=\frac{2+x}{2}，\quad 1=\frac{0+y}{2}，\quad 3=\frac{-1+z}{2}$$

$\therefore \quad x=0,y=2,z=7$，即 $P'(0,2,7)$.

33. 求通过点 $p(2,0,-1)$，且又通过直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的平面方程.

解：因为所求的平面过点 $p(2,0,-1)$ 和 $p'(-1,0,2)$，且它平行于矢量 $\{2,-1,3\}$，所以要求的平面方程为：

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

即 $$x+5y+z-1=0.$$

34. 求通过直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z+1}{-1}$ 且与直线 $\begin{cases}2x-y-z-3=0\\ x+2y-z-5=0\end{cases}$ 平行的平面方程.

解：已知直线的方向矢量为 $\{2,-1,1\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,3,5\}$，

$\therefore$ 平面方程为： $$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z+1 \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

即 $$11x+2y+z-15=0.$$

35. 通过直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ 且与平面 $3x+2y-z-5=0$ 垂直的平面方程.

解：$\because$ 平面的法矢量为 $\{2,-3,2\}\times\{3,2,-1\}=\{-1,8,13\}$，

$\therefore$ 平面的方程为：$(x-1)-8(y+2)-13(z-2)=0$，

即 $$x-8y-13z+9=0.$$

36. 求通过直线 $\begin{cases}5x+8y-3z+9=0\\ 2x-4y+z-1=0\end{cases}$ 向三坐标面所引的三个射影平面方程.

解：由已知方程 $\begin{cases}5x+8y-3z+9=0\\ 2x-4y+z-1=0\end{cases}$

分别消去 x，y，z 得到：

$$36y-11z+23=0,\quad 9x-z+7=0,\quad 11x-4y+6=0$$

此即为三个射影平面的方程.

37. 将直线的一般方程 $\begin{cases}2x+y-z+1=0\\ 3x-y-2z-3=0\end{cases}$ 化为射影式方程与标准方程.

解：直线的方向数为：$\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=(-3):1:(-5)$

$\therefore$射影式方程为：$\begin{cases}x=\dfrac{-3}{-5}z+\dfrac{-2}{-5}\\ y=-\dfrac{1}{5}z+\dfrac{9}{-5}\end{cases}$.

即$\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}z+\dfrac{2}{5}\\ y=-\dfrac{1}{5}z-\dfrac{9}{5}\end{cases}$，标准方程为：$\dfrac{x-\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{y+\frac{9}{5}}{-\frac{1}{5}}=z$.

38. 将直线的一般方程$\begin{cases}x+z-6=0\\ 2x-4y-z+6=0\end{cases}$化为射影式方程与标准方程，并求出它的方向余弦.

. 解：已知直线的方向数为：$\begin{vmatrix}0 & 1\\ -4 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\end{vmatrix}=4:3:(-4)$，

射影式方程为：$\begin{cases}x=\dfrac{4}{-4}z+\dfrac{-24}{-4}\\ y=\dfrac{3}{-4}z+\dfrac{-18}{-4}\end{cases}$，

即$\begin{cases}x=-z+6\\ y=-\dfrac{3}{4}z+\dfrac{9}{2}\end{cases}$，标准方程为：$\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y-\frac{9}{2}}{-\frac{3}{4}}=z$.

方向余弦为：$\cos\alpha=\pm\dfrac{-1}{\frac{\sqrt{41}}{4}}=\mp\dfrac{4}{\sqrt{41}}$，$\cos\beta=\pm\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{41}}{4}}=\mp\dfrac{3}{\sqrt{41}}$.

39. 将直线的一般方程$\begin{cases}x+y-z=0\\ x=2\end{cases}$化为标准方程，并求出它的方向余弦.

解：已知直线的方向数为：$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0:(-1):(-1)=0:1:1$，

$\therefore$标准式方程为：$\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+2}{1}=z$，

方向余弦为：$\cos\alpha=0$，$\cos\beta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\gamma=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

40. 试验证直线l：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$与平面$\pi$：$2x+y-z-3=0$相交，并求出它

们的交点.

解： $\because \ 2\times(-1)+1\times1-1\times2=-3\neq0$

$\therefore$ 直线与平面相交.

又直线的坐标式参数方程为： $\begin{cases}x=-t\\ y=1+t\\ z=1+2t\end{cases}$

设交点处对应的参数为t_0，

$\therefore 2\times(-t_0)+(1+t_0)-(1+2t_0)-3=0$

$\therefore t_0=-1$，从而交点为（1，0，-1）.

41. 试确定l,m的值，使：直线$\begin{cases}x=2t+2\\ y=-4t-5\\ z=3t-1\end{cases}$与平面$lx+my+6z-7=0$垂直.

解：根据题意得：

$$\frac{l}{2}=\frac{m}{-4}=\frac{6}{3}$$

所以：$l=4,m=-8$.

42. 求与平面$x+2y+3=0$相切于点$M(1,1,-3)$且半径$r=3$的球面方程.

解： $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{3}t\\ y=1+\dfrac{2}{3}t\\ z=-3+\dfrac{2}{3}t\end{cases}$ 为过切点M且垂直与已知平面的直线, 则$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$是这条直线的方向余弦. 取$t=3$, 则得$x=2,y=3$; 取$t=-3$, 则得$x=0,y=-1,z=-5$.

故所求球面有两个: $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$, 与$x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$.

43. 求与两平行平面 6x-3y-2z-35=0 和 6x-3y-2z+63=0 都相切且于其中之一相切于点$M(5,-1,-1)$的球面方程.

解：$x=5+6t,y=-1-3t,z=-1-2t$为过点M且垂直于两平面的直线, 将其代入第二个平面方程, 得$t=-2$, 反代回参数方程, 得$x=-7,y=5,z=3$. 设球之中心为C, 半径为r, 则$C(-1,2,1),r^2=(5+1)^2+(-1-2)^2+(-1-1)^2=49$. 故所求球面

方程为$\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-1\right)^2=49$.

44. 直线方程$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的系数满足什么条件才能使：直线与$x$轴相交？

解：所给直线与x轴相交$\Leftrightarrow$ $\exists$ x_0使

$$A_1x_0+D_1=0\text{且}A_2x_0+D_2=0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{vmatrix}A_1 & D_1\\A_2 & D_2\end{vmatrix}=0\text{且 }A_1\text{，}A_2\text{不全为零.}$$

45. 试确定λ的值，使两直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$与$x+1=y=1=z$相交？

解：根据题意得：

$$\begin{vmatrix}1+1 & -1-1 & 1\\1 & 2 & \lambda\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

从而 $$\lambda=\frac{5}{4}.$$

46. 试判断直线$\begin{cases}x=t\\y=2t+1\\z=-t-2\end{cases}$与$\frac{x-1}{4}=\frac{y-4}{17}=\frac{z+2}{-5}$的相互位置，如果是相交的或平行的直线求出它们所在的平面？

解：因为 $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\1 & 2 & -1\\4 & 7 & -5\end{vmatrix}=0$，

但是：1：2：（-1）≠4：7：（-5）

所以，两直线相交，两直线所决定的平面的法矢量为$\{1,2-1\}\times\{4,7,-5\}=\{-3,1,-1\}$，

故平面的方程为：$3x-y+z+3$.

47. 直线方程$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的系数满足什么条件才能使：直线与$x$轴平行?

解：$\because$ x轴与平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$平行

$$\therefore\quad 1\cdot A_1+0\cdot B_1+0\cdot C_1=0\quad\Rightarrow A_1=0$$

又 x 轴与平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 平行，所以

$$1\cdot A_1+0\cdot B_2+0\cdot C_2=0 \quad \Rightarrow A_2=0$$

即 $A_1=A_2=0$，但直线不与 x 轴重合，

$\therefore$ D_1,D_2 不全为零.

48. 试判断直线 $\begin{cases}x-2y+2z=0\\3x+2y-6=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x+2y-z-11=0\\2x+z-14=0\end{cases}$ 的相互位置，如果是相交的或平行的直线求出它们所在的平面？

解：将所给的直线方程化为标准式，为：

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-2}=\frac{y-\frac{3}{4}}{3}=\frac{z}{4}$$

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-4}$$

$\because$（-2）：3：4=2：（-3）：（-4）

$\therefore$ 两直线平行.

又点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{4},0)$ 与点（7，2，0）在两直线上，所以矢量 $\left\{7-\frac{3}{2},2-\frac{3}{4},0\right\}=\left\{\frac{11}{2},\frac{5}{4},0\right\}$ 平行于两直线所确定的平面，该平面的法矢量为：$\{-2,3,4\}\times\left\{\frac{11}{2},\frac{5}{4},0\right\}=\{-5,22,-19\}$，而平面方程为：

$$5(x-7)-22(y-2)+19(z-0)=0，即 \ 5x-22y+19z+9=0.$$

49. 试判断直线 $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$ 与 $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$ 的相互位置，如果是异面直线，求出它们之间的距离？

解：因为 $\Delta=\begin{vmatrix}3+3 & 8+7 & 3-6\\ 3 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}=-270\neq 0$，

$\therefore$ 两直线是异面的.

两直线的距离：$d=\dfrac{\left\|\begin{vmatrix}6 & 15 & -3\\ 3 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}\right\|}{\left|\{3,-1,1\}\times\{-3,2,4\}\right|}=\dfrac{270}{\sqrt{6^2+15^2+3^2}}=\sqrt{270}=3\sqrt{30}$.

50. 试验证直线 l：$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 与平面 π：$2x+y-z-3=0$ 相交，并求出它

们的交角.

解： $\because\ 2\times(-1)+1\times1-1\times2=-3\neq0$

$\therefore$ 直线与平面相交.

又设直线l与平面π的交角为θ，则：

$$\sin\theta=\frac{|2\times(-1)+1\times1-1\times2|}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$.

51. 给定两异面直线：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 与 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$，试求它们的公垂线方程.

解：因为 $\{2,1,0\}\times\{1,0,1\}=\{1,-2,-1\}$，

所以，公垂线方程为：

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x-3 & y & z-1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}x+1 & y-2 & z\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x-2y+5z-8=0\\2x+2y-2z-2=0\end{cases}$，亦即 $\begin{cases}x-2y+5z-8=0\\x+y-z-1=0\end{cases}$.

52. 求两直线 $\begin{cases}3x-4y-2z=0\\2x+y-2z=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}4x+y-6z-2=0\\y-3z+2=0\end{cases}$ 的夹角.

解：直线

$\begin{cases}3x-4y-2z=0\\2x+y-2z=0\end{cases}$ 的对称式方程为: $\dfrac{x}{10}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{11}$,

$\begin{cases}4x+y-6z-2=0\\y-3z+2=0\end{cases}$ 的对称式方程为: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+6}{12}=\dfrac{z+\frac{4}{3}}{4}$

$$\cos\theta=\pm\frac{30+24+44}{\sqrt{100+4+121}\sqrt{9+144+16}}=\pm\frac{98}{13\times15}=\pm\frac{98}{195}$$

$\therefore\ \theta=\arccos\dfrac{98}{195}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{98}{195}$.

53. 求通过点 $P(1,0,-2)$ 且与平面 $3x-y+2z-1=0$ 平行, 又与直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线方程.

解：设过点$P(1,0,-2)$的所求直线为

$$\frac{x-1}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z+2}{Z}.$$

∵ 它与已知平面$3x-y+2z-1=0$平行, 所以有$3x-y+2z=0$ （1）

又∵ 直线与已知直线相交, 那么必共面.

∴ 又有

$$\begin{vmatrix} 1-1 & 3-0 & 0+2 \\ 4 & -2 & 1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0$$

即 $$7x+18y-12z=0.$$ （2）

由(1), (2)得 $X:Y:Z=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -12 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -12 & 7 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-4:50:31$

而 $-4:50:31\neq 4:(-2):1$

∴ 所求直线的方程为 $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{50}=\dfrac{z+2}{31}$.

54. 求通过点 A（−3, 1, 0）和直线$\begin{cases} x+2y-z+4=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$的平面方程.

解：根据题意，可设所求的平面方程为：

$$k_1(x+2y-z+4)+k_2(3x-y+2z-1)=0 \quad (*)$$

其中k_1,k_2不全为零。 由于该平面经过点 A（−3, 1, 0），故有

$$k_1(-3+2\times1-0+4)+k_2(3\times(-3)-1+2\times0-1)=0$$

整理得到

$$k_1=\frac{11}{3}k_2$$

将其代入到（*）式并整理得所求的平面方程为：

$$20x+19y-5z+41=0 \ .$$

55. 求两直线$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$与$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{6}$的夹角.

解：根据题意得：

$$\cos\theta=\pm\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=\pm\frac{6+54+12}{\sqrt{9+36+4}\sqrt{4+81+36}}=\pm\frac{72}{77}$$

$\therefore \quad \theta = \arccos\frac{72}{77}$ 或 $\pi - \arccos\frac{72}{77}$.

56. 求通过点 $P(4,0,-1)$ 且与两直线 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$, 与 $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x+4y-z=4 \end{cases}$ 都相交的直线方程.

解：设所求直线的方向矢量为 $\vec{v}=\{x,y,z\}$，则所求直线可写为 $\frac{x-4}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z+1}{Z}$.

$\because$ 直线 l_1 平行于矢量 $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\{1,1,1\}\times\{2,-1,-1\}=\{0,3,-3\}$.

$\therefore$ 矢量 $\vec{v}=\{0,3,-3\}$ 为直线 l_1 的方向矢量.

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$ 因此令 y=o 解方程组得 $x=1, z=0$

$\therefore$ 点 $(1,0,0)$ 为直线 l_1 上的一点.

$\therefore$ 直线 l_1 的标准方程为 $\frac{x-5}{5}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{6}$.

$\because$ l 与 l_1, l_2 都相交且 l_1 过点 $M_1(1,0,0)$.方向矢量为 $\overrightarrow{v_1}=\{0,3,-3\}$.

l_2 过点 $M_2(1,0,-2)$,方向矢量 $\overrightarrow{v_2}=\{5,-1,6\}$.

$\therefore$ 有 $\left(\overrightarrow{m_1 p},\overrightarrow{v_1},\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0$

即 X+3Y+3Z=0. $\left(\overrightarrow{m_2 p},\overrightarrow{v_2},\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 6 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0$

即 X-13Y-3Z=0. 得 X:Y:Z=30:6:-16

又 $\because$ $30:6:-16\neq 0:3:-3$, 即 $\vec{v}$ 不平行 $\vec{v_1}$.

又 $30:6:-16\neq 5:1:6$, 即 $\vec{v}$ 不平行 $\vec{v_2}$.

$\therefore$ 所求直线方程为: $\frac{x-4}{15}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-8}$.

57. 求与直线 $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$ 平行且和两直线 $\begin{cases} z=5x-6 \\ z=4x+3 \end{cases}$, $\begin{cases} z=2x-4 \\ z=3y+5 \end{cases}$ 相交的直线方程.

解：在两直线上分别取两点 $M_1(9,0,39), M_2(0,-3,-4)$,

第一条直线的方向矢量为 $\vec{v_1}\{0,1,0\}$，第二条直线的方向矢量为 $\vec{v_2}\{3,2,6\}$，

作两平面：$\pi_1 : \begin{vmatrix} x-9 & y & z-39 \\ 8 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \pi_2 : \begin{vmatrix} x & y+3 & z+4 \\ 8 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$

即 $x-8z+303=0; 8x-9y-z-31=0,$

将其联立即为所求直线的方程：$\begin{cases} x-8z+303=0 \\ 8x-9y-z-31=0 \end{cases}.$

58. 求与直线 $\dfrac{x+2}{8} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{1}$ 平行且和两直线 $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=3t+5, \\ z=t \end{cases} \begin{cases} x=5t+10 \\ y=4t-7 \\ z=t \end{cases}$ 相交的直线方程.

解：根据题意得：$\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ 即 $2x-3y+5z+21=0$ （1）

$\begin{vmatrix} x-10 & y+7 & z \\ 5 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ 即 $x-y-z-17=0$ （2）

(1)(2)联立：$\begin{cases} 2x-3y+5z+21=0 \\ x-y-z-17=0 \end{cases}$.这就是所要求的直线方程.

59. 求过点 $P(2,1,0)$ 且与直线 $l : \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+25}{-2}$ 垂直相交的直线方程.

解：设所求直线的方向矢量为 $\overrightarrow{V_0} = \{X, Y, Z\}$，则所求直线 l_0 可写为 $\dfrac{x-2}{X} = \dfrac{y-1}{Y} = \dfrac{z-0}{Z}$. 直线 l 过点 $M(5,0,-25)$, 直线 l 的方向矢量 $\vec{V} = \{3,2,-2\}$.

l_0 与 l 垂直，所以有 $\vec{v_0} \cdot \vec{v} = 0.$

∴ 3X+2Y-2Z=0 (1)

l_0 与 l 相交，则有 $\left(\overrightarrow{MP}, \vec{v}, \vec{v_0}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 25 \\ 3 & 2 & -2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$

即 50X-69Y+6Z=0 (2)

由(1),(2)得 $X : Y : Z = 120 : 131 : 311$

∴所求直线l_0为: $\dfrac{x-2}{120}=\dfrac{y-1}{131}=\dfrac{z}{311}$.

60. 求点$p(2,3,-1)$到直线$\begin{cases}2x-2y+z+3=0\\3x-2y+2z+17=0\end{cases}$的距离.

解：直线的标准方程为：

$$\frac{x-11}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+25}{-2}.$$

所以，p到直线的距离为：

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}3&24\\1&-2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}24&-9\\-2&2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-9&3\\2&1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{2025}}{3}=\frac{45}{3}=15.$$

61. 求通过平面$4x-y+3z-1=0$和$x+5y-z+2=0$的交线且通过原点的平面方程.

解：设所求的平面为：$(4x-y+3z-1)+\lambda(x+5y-z+2)=0$

欲使平面通过原点，则须：$-1+2\lambda=0$，即$\lambda=\dfrac{1}{2}$，

故所求的平面方程为：

$$2(4x-y+3z-1)+(x+5y-z+2)=0$$

即： $9x+3y+5z=0$.

62. 求通过平面$4x-y+3z-1=0$和$x+5y-z+2=0$的交线且与y轴平行的平面方程.

解:设所求的平面为:$(4x-y+3z-1)+\lambda(x+5y-z+2)=0$,可求出$\lambda=\dfrac{1}{5}$.

故所求的平面方程为：$5(4x-y+3z-1)+(x+5y-z+2)=0$.

即： $21x+14z-3=0$.

63. 求通过平面$4x-y+3z-1=0$和$x+5y-z+2=0$的交线且与平面$2x-y+5z-3=0$垂直的平面方程.

解：设所求的平面为：$(4x-y+3z-1)+\lambda(x+5y-z+2)=0$，欲使所求平面与平面$2x-y+5z-3=0$垂直，则须：

$$2(4+\lambda)-(-1+5\lambda)+5(3-\lambda)=0.$$

从而：$\lambda=3$. 所以所求平面方程为：$7x+14y+5=0$.

64. 求平面束 $(x+3y-5)+\lambda(x-y-2z+4)=0$，在 x,y 两轴上截距相等的平面.

解：所给的方程截距式为：

$$\frac{x}{\frac{5-4\lambda}{1+\lambda}}+\frac{y}{\frac{5-4\lambda}{3-\lambda}}+\frac{z}{\frac{5-4\lambda}{-2\lambda}}=1.$$

据要求：$\frac{5-4\lambda}{1+\lambda}=\frac{5-4\lambda}{3-\lambda} \quad\Rightarrow\quad \lambda=1$,

所以，所求的平面为：$2x+2y-2z-1=0$.

65. 求通过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面.

解：设所求的平面为：$\mu(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0$

则：$\pm\frac{(\mu+\lambda)+5\mu\times(-4)+(\mu-\lambda)\times(-8)}{\sqrt{(\mu+\lambda)^2+(5\mu)^2+(\mu-\lambda)^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

从而 ，$\mu:\lambda=0:1$ 或 $-4:3$

所以所求平面为：$x-z+4=0$ 或 $x+20y+7z-12=0$.

66. 求通过直线 $\frac{x+1}{0}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-3}$ 且与点 $p(4,1,2)$ 的距离等于 3 的平面.

解：直线的一般方程为：

$$\begin{cases} x+1=0 \\ 3y+2z+2=0 \end{cases}$$

设所求的平面的方程为 $\lambda(x+1)+\mu(3y+2z+2)=0$，

据要求，有：$\frac{|4\lambda+3\mu+4\mu+\lambda+2\mu|}{\sqrt{\lambda^2+9\mu^2+4\mu^2}}=3$

$\therefore$ 有 $9(\lambda^2+13\mu^2)=25\lambda^2+81\mu^2+90\lambda\mu$

$\therefore\ \lambda:\mu=-6:1$ 或 $3:8$.

即所求平面为：$-6(x+1)+(3y+2z+2)=0$ 或 $3(x+1)+8(3y+2z+2)=0$,

即：$6x-3y-2z+4=0$ 或 $3x+24y+16z+19=0$.

67. 求与平面$x-2y+3z-4=0$平行且通过点$(1,-2,3)$的平面方程.

解：设所求的平面为$x-2y+3z-\lambda=0$，将点$(1,-2,3)$的坐标代入方程得$\lambda=14$，则所求平面方程为$x-2y+3z-14=0$.

68. 直线$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$通过原点的条件是什么？

解：已知直线通过原点$\Leftrightarrow\begin{cases}A_1\cdot0+B_1\cdot0+C_1\cdot0+D_1=0\\A_2\cdot0+B_2\cdot0+C_2\cdot0+D_2=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}D_1=0\\D_2=0\end{cases}，故条件为D_1=D_2=0.$$

69. 求与平面$x-2y+3z-4=0$平行且与y轴上截距为-3的平面方程.

解：设所求的平面为$x-2y+3z=\lambda$.

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{-\frac{\lambda}{2}}=\frac{z}{-\frac{\lambda}{3}}=1,令-\frac{\lambda}{2}=-3,得\lambda=6.$$

故所求平面为$x-2y+3z-6=0$.

70. 求与平面$x-2y+3z-4=0$平行且与与原点距离为1的平面方程.

解：设所求的平面为$x-2y+3z+\lambda=0$，将其法化为$\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(x-2y+3z+\lambda)=0$，将原点的坐标代入得$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}$，故所求平面为$x-2y+3z\pm\frac{1}{\sqrt{14}}=0$.

71. 设一平面与平面$x+3y+2z=0$平行，且与三坐标平面围成的四面体体积为6，求这平面的方程.

解:设所求平面方程为: $x+3y+2z=0$

原点到该平面的距离为$d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{14}}$.

$\therefore\ -\lambda,-\frac{1}{3}\lambda,-\frac{1}{2}\lambda$ 分别叫做平面在三坐标轴上的截距.

四面体体积 $V=\frac{1}{3}Sh.$

$\therefore\ 6=\frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}(-\lambda)(-\frac{1}{3}\lambda)(-\frac{1}{2}\lambda)\right|$, 即 $\lambda=\pm 6.$

$\therefore$ 这个平面的方程为 $x+3y+2z\pm 6=0$.

72. 直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使直线在坐标平面 XOZ 内?

解: 坐标平面 XOZ 属于平面束:

$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2Y+C_2z+D_2)=0$

化简为 $(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+(lC_1+mC_2)z+(lD_1+mD_2)=0$

设平面 XOZ 面 $y=0,x\neq 0,z\neq 0.$ 有 $\begin{cases} lA_1+mA_2=0 \\ lC_1+mC_2=0 \\ lD_1+mD_2=0 \end{cases}$

$\therefore\ \frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$

73. 已知连接两点 $A(3,10,-15),B(0,12,z)$ 的线段平行于平面 $7x+4y-z-1=0$，求 B 点的 z 坐标.

解：因为 $\overrightarrow{AB}=\{-3,2,15+z\}$

而 $\overrightarrow{AB}$ 平行于 $7x+4y-z-1=0$, 所以：$(-3)\times 7+2\times 4-(z+15)=0$，从而 $z=-28$.

74. 求原点O在所求平面上的正射影为P$(2,9,-6)$的平面方程.

解：$\vec{op}=\{2,9,-6\}.$

$p=\left|\vec{op}\right|=\sqrt{4+81+36}=11.$

$\vec{op}=p\cdot n^0=11(\cos\partial,\cos\beta,\cos\gamma)=(2,9,-6).$

$\therefore\ \cos\partial=\frac{2}{11},\cos\beta=\frac{9}{11},\cos\gamma=-\frac{6}{11}.$

则该平面的法式方程为: $\frac{2}{11}x+\frac{9}{11}y-\frac{6}{11}z-11=0.$

即 $$2x+9y-6z-121=0.$$

75. 求过点 $\mathrm{M}(2,3,-4)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距分别为 -2 和 -3 的平面方程.

解：设该平面的截距式方程为 $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{c}=1$, 把点 $\mathrm{M}(2,3,-4)$ 代入得 $c=-\frac{4}{3}$,

故所求平面方程为：$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{-\frac{4}{3}}=1.$

76. 将平面的一般方程 $x-2y+5z-3=0$ 化为法式方程.

解：$\because D=-3.$

$\therefore \lambda=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{30}}$

$\therefore$ 将已知的一般方程乘上 $\lambda=\frac{1}{\sqrt{30}}$. 得法式方程 $\frac{x}{\sqrt{30}}-\frac{2y}{\sqrt{30}}+\frac{5z}{\sqrt{30}}-\frac{3}{\sqrt{30}}=0.$

77. 求点 $M(-2,4,3)$ 到平面 $2x-y+2z+3=0$ 间的离差和距离.

解：将平面的方程法式化，得：
$$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0,$$
故离差为：$\delta(M)=(-\frac{2}{3})\times(-2)+\frac{1}{3}\times 4-\frac{2}{3}\times 3-1=-\frac{1}{3}$,

M 到平面的距离 $d=|\delta(M)|=\frac{1}{3}.$

78. 求在 y 轴上且到平面 $2+2y-2z-2=0$ 的距离等于 16 个单位的点.

解：设要求的点为 $M(0,y_0,0)$ 则由题意
$$\frac{|2y_0-2|}{\sqrt{9}}=16$$
$\therefore\ |y_0-1|=24 \quad \Rightarrow y_0=-23$ 或 25.

即所求的点为 $(0,-23,0)$ 及 $(0,25,0)$.

79. 已知四面体的四个顶点为 $S(0,6,4), A(3,5,3), B(-2,11,-5), C(1,-1,4)$，计算从顶点

S 向底面 ABC 所引的高.

解：底面 ABC 的方程为：

$$2x-y-2z+5=0$$

所以，高 $h=\dfrac{|-6-2\times 4+5|}{3}=3$.

80. 求中心在 $C(3,-5,2)$ 且与平面 $2x-y-3z+11=0$ 相切的球面方程.

解：球面的半径为 C 到平面 π： $2x-y-3z+11=0$ 的距离，它为：

$R=\dfrac{|2\times 3+5+6+11|}{\sqrt{14}}=\dfrac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}$，

所以，要求的球面的方程为：

$$(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56.$$

即：$x^2+y^2+z^2-6x+10y+4z-18=0$.

81. 设平面过原点 O 及点 $M(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

解：设 $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\{6,-3,2\}$，平面 $4x-y+2z=8$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=\{4,-1,2\}$，设所求平面的法向量为 $\vec{n}$，则

$$\vec{n}=\vec{a}\times\overrightarrow{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=\{-4,-4,6\}$$

因此平面方程为 $x+y-\dfrac{3}{2}z=0$，即 $2x+2y-3z=0$.

82. 已知两条直线方程分别为：

$l_1:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ ，$l_2:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-2}{k}=\dfrac{z-2}{-5}$, 则 k 为何值时，l_1,l_2 相交？

解： $M_1(5,-4,1),M_2(5,2,2),\vec{v}_1(1,-2,3),\vec{v}_2(1,k,-5)$

l_1,l_2 相交的充要条件是 $\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 共面，且 $\vec{v}_1\nparallel\vec{v}_2$，

即 $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 6 & -2 & k\\ 1 & 3 & -5\end{vmatrix}=0$，且 $\vec{v}_1\nparallel\vec{v}_2$，

$k=-50$, 且此时 $\vec{v}_1\nparallel\vec{v}_2$.

83. 求平面$\pi_1: 2x-y-2z+1=0$和$\pi_2: 4x-2y-4z-7=0$的距离.

解：从π_1上任取一点$M(x_0, y_0, z_0)$，即 $2x_0-y_0-2z_0+1=0$，

两平面间的距离即点M到π_2的距离,

$$\therefore \quad d=\frac{|4x_0-2y_0-4z_0-7|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}}=\frac{3}{2} \quad .$$

84. 求过直线$l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$且平行于直线$l_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$的平面方程.

解：设所求平面为π，π过点$(1,0,0)$，且与$\vec{v}_1(2,1,-1), \vec{v}_2(2,1,-2)$平行，

所以，所求平面为$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z & -1 & -2 \end{vmatrix}=0$，　　即　$x-2y-1=0$.

85. 在直角坐标系下，求通过点$(2,-1,3)$，平行于平面$\pi: x+2y-z-2=0$且垂直于直线$l_1: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{4}$的直线方程.

解：设所求直线的一个方向向量为$\vec{v}(X, Y, Z)$，

则　$\begin{cases} X+2Y-Z=0, \\ 3X-2Y+4Z=0, \end{cases}$

解得　$\begin{cases} X=-\dfrac{3}{4}Z, \\ Y=\dfrac{7}{8}Z, \end{cases}$　　取$Z=8$，则　$X=-6, Y=7$　，

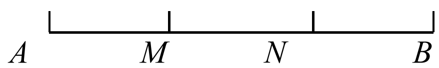
故所求直线为　$\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-3}{8}$.

86. 设点$M(7,-4,1)$和$N(-2,2,4)$把线段AB三等分，求点A, B的坐标.

解：如右下图所示：设$A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$，$M$是$AB$的中点，则

$$\left(\frac{a_1-2}{2}, \frac{a_2+2}{2}, \frac{a_3+4}{2}\right)=(7,-4,1)$$

解得



$a_1=16, a_2=-10, a_3=-2$　，

故　$A(16,-10,-2)$，同理可得　$B(-11,8,7)$

87. 在右手直角坐标系下，求点$(3,-2,2)$到直线$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$的距离.

解：设点$(3,-2,2)$为M，点$(-1,1,2)$为M_0，直线的方向向量为$\vec{v}(2,-2,1)$，

则点到直线的距离为 $$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\sqrt{29}}{3}.$$

88. 设平面$\pi_1:2x-y+3z-p=0$, $\pi_2:qx+2y-6z+2=0$，问p,q取何值时，

（1）π_1,π_2相交；（2）π_1,π_2平行；（3）π_1,π_2重合？

解：（1）$q\neq-4$, p取任意值；

（2）$p\neq1, q=-4$；

（3）$p=1, q=-4$.

89. 在直角坐标系中，求过点$M(1,1,1)$，且与两平面$\pi_1:4x-y+3z-1=0$和$\pi_2:x+5y-z=0$都垂直的平面方程.

解：设所求平面为π， π过点$(1,1,1)$，且与$\vec{v}_1(4,-1,3),\vec{v}_2(1,5,-1)$平行，

所以，所求平面为$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 1 \\ y-1 & -1 & 5 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$，

即 $2x-y-3z+2=0$.

90. 求经过点$A(2,-1,3)$，且平行于直线$l:\begin{cases} 2x+4y+z+1=0 \\ 2x+2y-z+5=0 \end{cases}$的直线方程.

解：设所求直线的一个方向向量为$\vec{v}(X,Y,Z)$，

则 $X=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, Y=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, Z=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$，

即$X=-6, Y=4, Z=-4$

故所求直线为 $$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{2}.$$

91. 试求经过点$P(4,-2,1)$和x轴的平面方程.

解：由于平面过 x 轴，可设为 $By+Cz=0$

以 $(4,-2,1)$ 代入，得 $-2B+C=0$

于是 $B:C=1:2$

故所求平面方程为 $y+2z=0$.

92. 试求经过点 $P(1,0,-1)$，并且与直线 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 和 $l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线的方程.

解：过 $P(1,0,-1)$ 与直线 l_1 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & -1-0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$$

即 $x-2y+z=0$

过 $P(1,0,-1)$ 与直线 l_2 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1-1 & 0-2 & -1-3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$$

即 $x+2y-z-2=0$

∴所求直线方程为
$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$$

93. 求过点 $(1,-1,1)$ 且与两平面 $x-y+z-1=0$ 和 $2x+y+z+1=0$ 都垂直的平面方程.

解：所求平面的法向量 $\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\{-2,1,3\}$，则所求平面方程为：

$-2\times(x-1)+1\times(y+1)+3\times(z-1)=0$，即 $-2x+y+3z=0$.

94. 求过点 $(1,2,-6)$ 且与两平面 $x+2z-8=0$ 和 $2x-y-z+5=0$ 的交线平行的直线方程.

解：设所求直线的方向向量为 $\vec{s}$，则根据题意得：

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\{2,5,-1\}$$

故所求直线方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+6}{-1}$.

95. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

解：设所求平面的法向量为 $\vec{n}$，则根据题意得：

$$\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=\{-16,14,11\}$$

故所求平面方程为 $\quad -16\times(x-2)+14\times(y-0)+11\times(z+3)=0$，

即 $\qquad 16x-14y-11z-65=0$.

96. 求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

解：先作一平面过点 $(2,1,3)$ 且垂直于已知直线，则该平面方程为：

$3x+2y-z-5=0$. （1）

再求已知直线与这个平面的交点. 已知直线的参数方程为：

$x=-1+3t, y=2t+1, z=-t$. （2）

把（2）代入（1）得：$t=\dfrac{3}{7}$，从而交点为：$\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$. 以 $(2,1,3)$ 为起点，$\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$ 为终点的向量为 $-\dfrac{6}{7}\{2,-1,4\}$ 就是所求直线的一个方向向量，故所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

97. 求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 与平面 $2x+2y+z-7=0$ 的交点及夹角的正弦值.

解：令 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}=t$，则 $\begin{cases} x=2+t, \\ y=-t+1, \\ z=t \end{cases}$ ①

把①代入 $2x+2y+z-7=0$ 得：$t=1$.

所以交点为：$(3,0,1)$.

夹角的正弦值：

$$\sin\psi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{|1\times2+(-1)\times2+1\times1|}{\sqrt{3}\times3}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

98. 求过点 $P(-3,-5,1)$ 且与直线 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ 垂直相交的直线的方程.

解：先作一平面过点 $P(-3,-5,1)$ 且垂直于已知直线，则该平面方程为：

$-x+2y+z+6=0$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　（1）

再求已知直线与这个平面的交点. 已知直线的参数方程为：

$x=-t, y=2t, z=t$.　　　　　　　　　　　　　　　　　（2）

把（2）代入（1）得：$t=-1$, 从而交点为：$(1,-2,-1)$. 故所求直线方程为:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

99. 求通过点 $A(1,2,-2)$ 且通过直线 $L:\dfrac{x-2}{3}=y+1=\dfrac{z-2}{-1}$ 的平面方程.

解：设所求平面的法向量为 $\vec{n}$, 已知点 $M(2,-1,2)$ 为直线 L 上一点，则根据

题意得：
$$\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{AM}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 4\end{vmatrix}=\{1,-13,-10\}.$$

故所求平面方程为　　$x-13y-10z+5=0$.

100. 求直线 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 与平面 $2x+y-z-4=0$ 的夹角.

解：根据题意得：$\sin\varphi=\dfrac{|-1\times2+1\times1+2\times(-1)|}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$.

故所求夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

101. 求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解：设所给直线的参数方程是：$x=2+t$，$y=3+t$，$z=4+2t$，代入平面

方程得：$2(2+t)+3(3+t)+(4+2t)+6=0$，解得 $t=-1$.

故交点为 $(1,2,2)$.

102. 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程.

解：设所求平面方程为：$By+Cz=0$，又平面过点 $(4,-3,-1)$，则有

$-3B-C=0$，即　　$C=-3B$.

故所求平面方程为：$y-3z=0$.

103. 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解：设所求平面方程为：$Ax+By+Cz=0$，又平面过点$(6,-3,2)$，则有

$$6A-3B+2C=0. \qquad ①$$

又与平面$4x-y+2z=8$垂直，则有$4A-B+2C=0$. ②

联立①和②得： $A=B=-\frac{2}{3}C$.

故所求平面方程为： $2x+2y-3z=0$.

104. 一平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量$\vec{a}=(2,1,1)$和$\vec{b}=(1,-1,0)$，求该平面方程.

解：设所求平面的法向量为$\vec{n}$, 则$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\{1,1,-3\}$.

故所求平面方程为：$x+y-3z+4=0$.

105. 求通过直线$l_1:\begin{cases}2x+y-z+1=0\\ x+2y+z-5=0\end{cases}$且与直线$l_2:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-2}$平行的平面方程.

解：设通过直线l_1的平面束为：

$$(2x+y-z+1)+\lambda(x+2y+z-5)=0,$$

即 $$(2+\lambda)x+(1+2\lambda)y+(-1+\lambda)z+1-5\lambda=0,$$

又平面与直线l_2平行，则

$$(2+\lambda)\times1+(1+2\lambda)\times1+(-1+\lambda)\times(-2)=0，从而\lambda=-5.$$

故所求平面方程为：$3x+9y+6z-26=0$.

106. 求通过原点，且垂直于两平面$x+2y+3z-2=0$与$6x-y-5z+23=0$的平面方程.

解：根据题意得，所求平面方程由点位式得：

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 2 & 3\\ 6 & -1 & -5\end{vmatrix}=0,$$

即 $7x-23y+13z=0$.

107. 求通过两点 $M_1(0,0,1)$ 与 $M_2(3,0,0)$，且与平面 $y+z-1=0$ 成 45^0 角的平面方程.

解：设所求平面方程为：$Ax+By+Cz+D=0$. 过点 $M_1(0,0,1)$ 与 $M_2(3,0,0)$，

则 $$\begin{cases} C+D=0 \\ 3A+D=0 \end{cases},$$

又与平面 $y+z-1=0$ 成 45^0 角，则有 $\pm\dfrac{B+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，联立两式

得： $A:B:C:D=0:1:0:0$ 或 $A:B:C:D=6:1:18:(-18)$.

故所求平面方程为：$y=0$ 或 $6x+y+18z-18=0$.

108. 求通过点 $M(-2,1,3)$ 和两平面 $2x-7y+4z-3=0,3x-5y+4z+11=0$ 的交线的平面.

解：设平面方程为：$\lambda(2x-7y+4z-3)+\mu(3x-5y+4z+11)=0$,

它又通过点 $M(-2,1,3)$，则 $\lambda(-4-7+12-3)+\mu(-6-5+12+11)=0$,

解得 $\lambda:\mu=6:1$.

故所求平面方程为：$15x-47y+28z-7=0$.

109. 求通过点 $(1,0,-2)$ 且和两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 与 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 都垂直的直线方程.

解：设直线方程为 $\dfrac{x-1}{X}=\dfrac{y}{Y}=\dfrac{z+2}{Z}$. 它与两直线垂直，则

$$\begin{cases} X+Y-Z=0 \\ X-Y=0 \end{cases}$$，从而 $X:Y:Z=1:1:2$.

故所求直线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

110. 求通过点 $P(1,0,-1)$ 且与平面 $x-2y+3z=0$ 平行，又与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 相交的直线方程.

解：设直线方程为 $\dfrac{x-1}{X}=\dfrac{y}{Y}=\dfrac{z+1}{Z}$. 由于它与平面 $x-2y+3z=0$ 平行，所以

$X-2Y+3Z=0$. ①

又它与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$相交，所以必共面, 则

$$\begin{vmatrix} 1-(-1) & 0-0 & -1-1 \\ 3 & 2 & 1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0，即 X-2Y+Z=0. \quad ②$$

由①和②得：$X:Y:Z=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2:1:0$，

而$2:1:0\neq 3:2:1$，故所求直线方程为：$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$.

111. 已知平面过点$M_0(3,-2,1)$，且与M_0到$M_1(-2,1,4)$的连线垂直，求其方程.

解：平面的法向量为$\overrightarrow{M_0M_1}=\{-5,3,3\}$，且过点$M_0(3,-2,1)$，则平面方程为：

$$-5\times(x-3)+3\times(y+2)+3\times(z-1)=0,$$

即 $5x-3y-3z+12=0$.

112. 在 x 轴上求一点，使它到平面 $12x+9y+20z-19=0$ 和到平面 $16x-12y+15z-9=0$的距离相等.

解：因所求点在x轴上，故可设这一点的坐标为$(x,0,0)$，且满足

$$\frac{|12x-19|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}}=\frac{|16x-9|}{\sqrt{16^2+(-12)^2+15^2}},$$

所以 $x=-\frac{5}{2}$或$x=1$，故点$\left(-\frac{5}{2},0,0\right)$和$(1,0,0)$即为所求.

113. 求过点$(-2,1,0)$且垂直于平面$3x-10y+9z-2=0$的直线的对称式方程与参数方程.

解：因直线垂直于平面$3x-10y+9z-2=0$，故直线的方向向量为$\vec{s}=\vec{n}=\{3,-10,9\}$，因此直线的对称方程为$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-10}=\frac{z}{9}$.

直线的参数方程是 $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=1-10t, \\ z=9t \end{cases}$.

114. 将直线的一般方程$\begin{cases}3x-2y+z+1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$化成对称式方程与参数方程.

解：设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是直线上一点，故M_0得坐标满足直线Γ的方程，即

$\begin{cases}3x_0-2y_0+z_0+1=0\\2x_0+y_0-z_0-2=0\end{cases}$，则$\begin{cases}y_0=-1+5x_0\\z_0=-3+7x_0\end{cases}$，令$x_0=0$，得$y_0=-1$，

$z_0=-3$，即直线过点$M_0(0,-1,-3)$，又$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{i} & \vec{k}\\3 & -2 & 1\\2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\{1,5,7\}$

因此直线的对称方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z+3}{7}$.

直线的参数方程是 $\begin{cases}x=t,\\y=-1+5t\\z=-3+7t\end{cases}$.

115. 求直线$\Gamma_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$与直线$\Gamma_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$的夹角$\theta$.

解：直线Γ_1与Γ_2的方向向量分别为$\overrightarrow{s_1}=\{1,-4,1\}$，$\overrightarrow{s_2}=\{2,-2,-1\}$，则

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{9}{\sqrt{18}\times 3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ ，故}\theta=\frac{\pi}{4}.$$

116. 讨论直线$\Gamma_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$与平面$\pi:x+y+z=1$之间的关系，相交时求出它们的夹角和交点的坐标.

解：因为直线的方向向量为$\vec{s}=\{1,-4,1\}$，的法向量为$\vec{n}=\{1,1,1\}$，

所以$\vec{s}\cdot\vec{n}=-2\neq 0$，故直线与平面相交. 夹角满足：

$$\sin\theta=\frac{\left|\vec{s}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{2}{\sqrt{18}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{9}\text{，故}\theta=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

直线的参数方程是$\begin{cases}x=1+t,\\y=2-4t,\\z=3+t\end{cases}$代入平面方程得：

$(1+t)+(2-4t)+(3+t)=1$，解得$t=\dfrac{5}{2}$.

故交点坐标为$\left(\dfrac{7}{2},-8,\dfrac{11}{2}\right)$.

117. 求过直线$\Gamma_1:\begin{cases}2x+y-z-2=0\\3x-2y-2z+1=0\end{cases}$且与直线$\Gamma_2:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$平行的平面方程.

解：过直线Γ_1的平面束方程为：$\lambda(2x+y-z-2)+\mu(3x-2y-2z+1)=0$，

即 $(2\lambda+3\mu)x+(\lambda-2\mu)y-(\lambda+2\mu)z-2\lambda+\mu=0$，其中$\lambda,\mu$为待定常数.

又平面与直线Γ_2平行，则$3(2\lambda+\mu)+2(\lambda-2\mu)+3(-\lambda-2\mu)=0$，解之得：

$\mu=5\lambda$. 故所求平面方程为：$17x-9y-11z+3=0$.

118. 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的射影.

解：过点$(-1,2,0)$且与平面$x+2y-z+1=0$垂直的直线方程是：

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}.$$

令$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}=t$，则$x=-1+t,y=2+2t,z=-t$，代入平面方程得：

$(-1+t)+2(2+2t)-(-t)+1=0$，解之得：$t=-\frac{2}{3}$. 交点坐标为$\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，

及点$\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$为所求射影.

119. 求直线$\Gamma:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x-y+2z-1=0$的射影直线$\Gamma_0$的平面方程.

解：先求过直线Γ且与平面π垂直的平面方程，直线Γ的平面束方程为：

$\lambda(x-y+1)+\mu(y+z-1)=0$，即

$$\lambda x+(\mu-\lambda)y+\mu z-\lambda-\mu=0.$$

又所求平面与平面π垂直，则$\lambda-(\mu-\lambda)+2\mu=2\lambda+\mu=0$.

解之得$\mu=-2\lambda$，则过直线Γ且与平面π垂直的平面方程为：

$$x-3y-2z+1=0,$$

从而直线Γ在平面π上的射影直线Γ_0的平面方程为：$\begin{cases}x-y+2z-1=0,\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$.

120. 求通过点 $(4,2,-3)$ 且平行于平面 $x+y+z=10$, 又与直线 $\begin{cases} x+2y-z-5=0 \\ z-10=0 \end{cases}$ 垂直的直线方程.

解：因为平面的法向量为 $\vec{n}=\{1,1,1\}$，已知直线的方向向量 $\vec{v}=\{2,-1,0\}$，

设所求直线方程为：$\dfrac{x-4}{l}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{n}$，则有 $\begin{cases} l+m+n=0 \\ 2l-m=0 \end{cases}$，

因此 $l:m:n=1:2:(-3)$，故所求直线方程为：$\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-3}$.

121. 求经过直线 $l:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$，而且与点 $A(4,1,2)$ 的距离等于 3 的平面方程.

解：经过 l 的平面可用平面束方程表示：$\lambda(x+1)+\mu(3y+2z+2)=0$，即

$$\lambda x+3\mu y+2\mu z+\lambda+2\mu=0.$$

由点到平面的距离公式有 $d=\dfrac{|5\lambda+9\mu|}{\sqrt{13\mu^2+\lambda^2}}=3$,

从而 $8\lambda^2+45\lambda\mu-18\mu^2=(\lambda+6\mu)(8\lambda-3\mu)=0$,

取 $\lambda=6,\mu=-1$，得 $6x-3y-2z+4=0$；

取 $\lambda=3,\mu=8$，得 $3x+24y+16z+19=0$.

122. 求过点 $M(1,1,1)$ 且平行于平面 $\pi:-2x+y-z+1=0$ 的平面方程.

解：因为所求平面与已知平面平行，则其法向量 $\vec{n}=\{-2,1,-1\}$，故所求平面方程为：$-2(x-1)+(y-1)-(z-1)=0$，即 $2x-y+z-2=0$.

123. 求过点 $M_1(1,2,0)$ 和 $M_2(2,1,1)$ 且垂直于平面 $\pi: y-x-1=0$ 的平面方程.

解：设所求平面的法向量为 $\vec{n}$，根据题意得：

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\{1,1,0\},$$

故所求平面方程为：$x+y-3=0$.

124. 过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的平面方程.

解：因平面过 z 轴，则设所求平面方程为 $Ax+By=0$，又与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2A+B}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{1}{2}$.

所以 $A=\dfrac{1}{3}B$ 或 $A=-3B$. 故所求平面方程为：

$$x+3y=0 \text{ 或 } 3x-y=0.$$

125. 平面过点 $A(-2,3,0)$，$B(1,-1,2)$ 且与向量 $\vec{a}=(4,5,1)$ 平行，求此平面的方程.

解：因为所求平面的法向量 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\vec{a}$ 垂直，则

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 5 & 1\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix}=\{14,-5,-31\},$$

故所求平面方程为：$14x-5y-31z+43=0$.

126. 平面过点 $M(2,0,-8)$ 且与两平面 $x-2y+4z-7=0$ 和 $3x+5y-2z+3=0$ 都垂直，求此平面的方程.

解：设所求平面的法向量 $\vec{n}$，则 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}=\{-16,14,11\}$，

故所求平面方程为：$16x-14y-11z-120=0$.

127. 求由平面 $x-3y+2z-5=0$ 与 $3x-2y-z+3=0$ 所成二面角的平分面方程.

解：设平面上任一点的坐标为 (x,y,z)，则根据题意得：

$$\frac{|x-3y+2z-5|}{\sqrt{14}}=\frac{|3x-2y-z+3|}{\sqrt{14}},$$

故所求平面方程为：$2x+y-3z+8=0$ 或 $4x-5y+z-2=0$.

128. 对于直线 $l_1:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$，与 $l_2:\begin{cases}2x-y-5=0\\ y-2z+3=0\end{cases}$，（1）证明：$l_1 // l_2$；

（2）求 l_1 与 l_2 的距离；（3）求 l_1 与 l_2 所确定的平面方程.

解：（1）因为则$\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\{2,4,2\}$，则$\overrightarrow{s_2}=2\overrightarrow{s_1}$，

所以$\overrightarrow{s_1}\,//\,\overrightarrow{s_2}$，即$l_1\,//\,l_2$.

（2）在l_2上找一点$A(1,-3,0)$，过该点做垂直于l_2的平面：$x+2y+z+5=0$，

将l_1的参数方程代入得：$1+\lambda-2+4\lambda+\lambda+5=0$，解得$\lambda=-\dfrac{2}{3}$，则平面

与l_1的交点为$B\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{7}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$，故$A$与$B$的距离$|AB|=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$即为所求.

（3）在l_1上找一点$C(1,-1,0)$，在l_2上找一点$A(1,-3,0)$，则平面的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=\{2,0,-2\},$$

故所求平面方程为：$x-z-1=0$.

证明题

1. 一直线与三坐标轴间的角分别为α,β,γ. 证明$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

证明：$\because\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$\therefore 1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta+1-\sin^2\gamma=1$.

故$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

2. 设直线与三坐标平面的交角分别为λ,μ,υ.证明$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\upsilon=2$.

证明:设直线与X,Y,Z轴的交角分别为α,β,γ.而直线与yoz,zox,xoy面的交角依次为λ,μ,γ.那么,$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\lambda,\beta=\dfrac{\pi}{2}-\mu,\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\upsilon$.

而$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

$\therefore\quad\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\lambda\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\mu\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\upsilon\right)=1$.

$\sin^2\lambda+\sin^2\mu+\sin^2\upsilon=1$.

从而有$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\upsilon=2$.

3. 设 d 和 d' 分别是坐标原点到点 $M(a,b,c)$ 和 $M'(a',b',c')$ 的距离，证明当 $aa'+bb'+cc'+dd'$ 时，直线 MM' 通过原点.

证明：$\because$ $\overrightarrow{OM}=\{a,b,c\}$，$\overrightarrow{OM'}=\{a',b',c'\}$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=aa'+bb'+cc'$，

而当 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\left|\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}\right|$，$\cos(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=dd'$ 时，必有 $\cos(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=1$

$\therefore \overrightarrow{OM}\,//\,\overrightarrow{OM'}$，$\therefore$ 当 $aa'+bb'+cc'+dd'$ 时，直线 MM' 通过原点.

4. 证明矢量 $\vec{v}=\{X,Y,Z\}$ 平行与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的充要条件为：$AX+BY+CZ=0$.

证明：　不妨设 $A\neq 0$，则平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的参数式方程为：

$$\begin{cases} x=-\dfrac{D}{A}-\dfrac{B}{A}u-\dfrac{C}{A}v \\ y=u \\ z=v \end{cases}$$，故其方位矢量为：$\{-\dfrac{B}{A},1,0\},\{-\dfrac{C}{A},0,1\}$，

从而 $\vec{v}$ 平行于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的充要条件为：

$\vec{v}$，$\{-\dfrac{B}{A},1,0\},\{-\dfrac{C}{A},0,1\}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ -\dfrac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\dfrac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \quad AX+BY+CZ=0$.

5. 试判断直线 $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ 与平面 $4x-3y+7z-7=0$ 的相互位置关系？

证明：$\because$ 直线的方向矢量为：$\{5,-3,2\}\times\{2,-1,-1\}=\{5,9,1\}$，

$\because$ $4\times5-3\times9+7\times1=0$，

而点 $M(-2,-5,0)$ 在直线上，又 $4\times(-2)-3\times(-5)-7=0$，

所以，直线在平面上.

6. 试判断直线 $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $4x-2y-2z=3$ 的相互位置关系？

证明：$\because (-2)\times4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)=0$，

而 $4\times3-2\times(-4)-2\times0-3=17\neq0$

所以，直线与平面平行.

7. 试判断直线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 与平面 $3x-2y+7z=8$ 的相互位置关系？

证明：$\because 3\times 3-2\times(-2)+17\times 7\neq 0$

所以，直线与平面相交，且因为 $\frac{3}{3}=\frac{-2}{-2}=\frac{7}{7}$，

故直线与平面垂直. 从而直线与平面垂直相交.

8. 证明两直线 $\begin{cases}x-2y+2z=0\\3x+2y-6=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x+2y-z-11=0\\2x+z-14=0\end{cases}$ 平行，求出它们所在的平面.

证明：将所给的直线方程化为标准式为：

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-2}=\frac{y-\frac{3}{4}}{3}=\frac{z}{4},\ \frac{x-7}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-4}$$

∵（-2）：3：4=2：（-3）：（-4）， ∴两直线平行.

又点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{4},0)$ 与点（7，2，0）在两直线上，

$\therefore$ 矢量 $\left\{7-\frac{3}{2},2-\frac{3}{4},0\right\}=\left\{\frac{11}{2},\frac{5}{4},0\right\}$ 平行于两直线所确定的平面，该平面的法矢量

为：$\{-2,3,4\}\times\left\{\frac{11}{2},\frac{5}{4},0\right\}=\{-5,22,-19\}$，从而平面方程为：

$5(x-7)-22(y-2)+19(z-0)=0$，即 $5x-22y+19z+9=0$.

9. 证明两直线 $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$ 与 $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$ 异面，并求出它们之间的距离.

证明：因为 $\Delta=\begin{vmatrix}3+3 & 8+7 & 3-6\\3 & -1 & 1\\-3 & 2 & 4\end{vmatrix}=-270\neq 0$，

$\therefore$ 两直线是异面的.

两直线的距离：$d=\dfrac{\left\|\begin{matrix}6 & 15 & -3\\3 & -1 & 1\\-3 & 2 & 4\end{matrix}\right\|}{|\{3,-1,1\}\times\{-3,2,4\}|}=\dfrac{270}{\sqrt{6^2+15^2+3^2}}=\sqrt{270}=3\sqrt{30}$

10. 设从坐标原点到平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的距离为 p. 求证: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$.

证明：由题知：$\left|\dfrac{-1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}\right| = p$，

所以 $\dfrac{1}{p}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}$.

从而有 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{p^2}$.

11. 证明直线 $l_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 与 $l_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 是异面直线.

证明：l_1 的方向向量为 $\{2,1,0\}$，l_2 的方向向量 $\{1,0,1\}$

取 l_1，l_2 上的点 $(3,0,1)$，$(-1,2,0)$，则

$$\begin{vmatrix} 3-(-1) & 0-2 & 1-0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

所以 l_1 与 l_2 是异面直线.

12. 证明直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 与 $l_2:\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-5}$ 共面.

证明：因为直线 l_1 过点 $O(0,0,0)$，方向向量 $\overrightarrow{s_1}=\{1,2,3\}$；直线 l_2 过点 $P(1,1,1)$，方向向量为 $\overrightarrow{s_2}=\{9,2,-5\}$，而

$$\left(\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 2 & -5 \\ 1-0 & 1-0 & 1-0 \end{vmatrix}=0,$$

所以直线 l_1 与 l_2 共面.