双曲抛物面

一、双曲抛物面的概念

1. 定义在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

所表示的曲面叫做双曲抛物面
其中a，b为任意的正常数

此方程也叫做双曲抛物面的标准方程

二、双曲抛物面的性质

1 对称性

双曲抛物面关于xOz 、yOz坐标平面, z坐标轴对称

事实上,如果(x,y,z)满足方程,则

(1) (x,-y,z)和(-x,y,z)也满足方程. 所以方程的图象关于xoz面、yoz面对称.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Back

二、双曲抛物面的性质

1 对称性

双曲抛物面关于xOz、yOz坐标平面，z坐标轴对称

事实上,如果(x,y,z)满足方程,则

(2) (-x,-y,z)满足方程．所以方程的图象关于z轴对称.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Back

二、双曲抛物面的性质

2 范围

双曲抛物面没有对 称中心

$$x \in R, y \in R, z \in R.$$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ 表示的曲面是无界的

Back

三、双曲抛物面与坐标平面的交线

i）用坐标面截割曲面

两条主抛物线具有相同的顶点和对称轴, 但开口方向相反.

①用坐标面$z=0$截割曲面，得

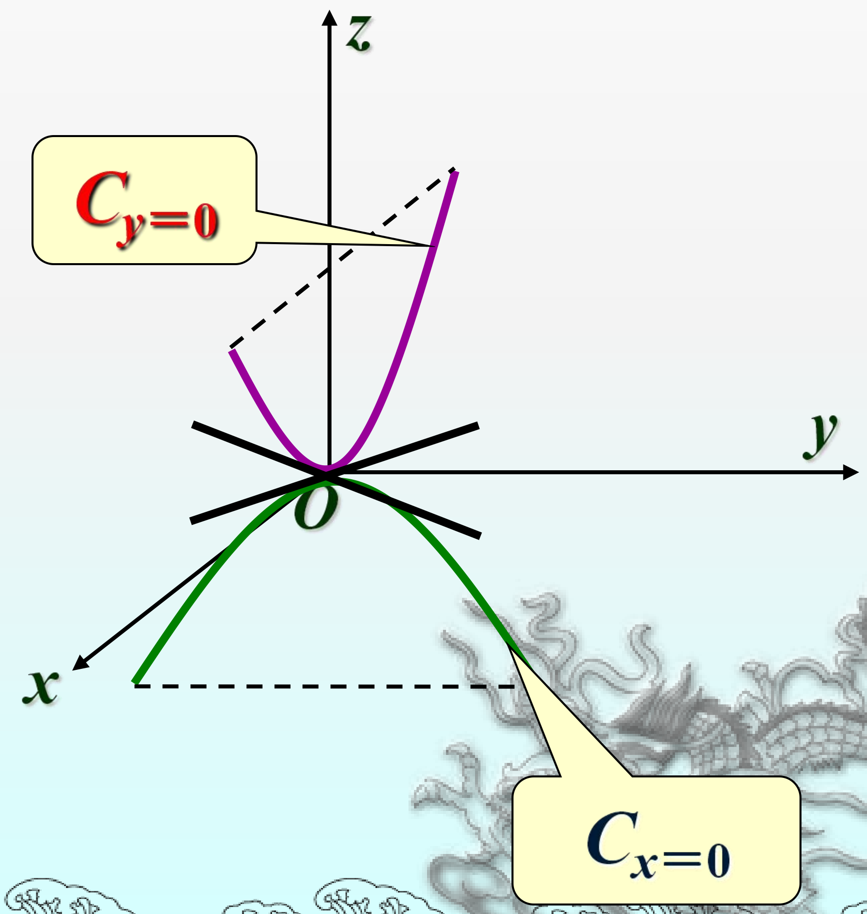
两相交直线$C_{z=0}$.

②用坐标面$y=0$截割曲面，得

抛物线 $C_{y=0}$: $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z, \\ y = 0. \end{cases}$

③用坐标面$x=0$截割曲面，得

抛物线 Cx=0: $\begin{cases} y^2 = -2b^2 z, \\ x = 0 \end{cases}$



四、用平行于坐标面的平面截割曲面

1.用Z=h截割双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

（1）当h > 0时

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ z=h,(h>0)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h \\ z=h,(h>0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2}-\dfrac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2}=1 \\ z=h,(h>0)\end{cases}$$

这是Z=h平面上的一条双曲线

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2} - \dfrac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2} = 1 \\ z = h, (h > 0) \end{cases}$

实轴平行于x轴，实半轴为 $\rightarrow$ $a\sqrt{2h}$

虚轴平行于y轴，虚半轴为 $\rightarrow$ $b\sqrt{2h}$

顶点坐标为 $\rightarrow$ $(\pm a\sqrt{2h}, 0, h), h > 0$

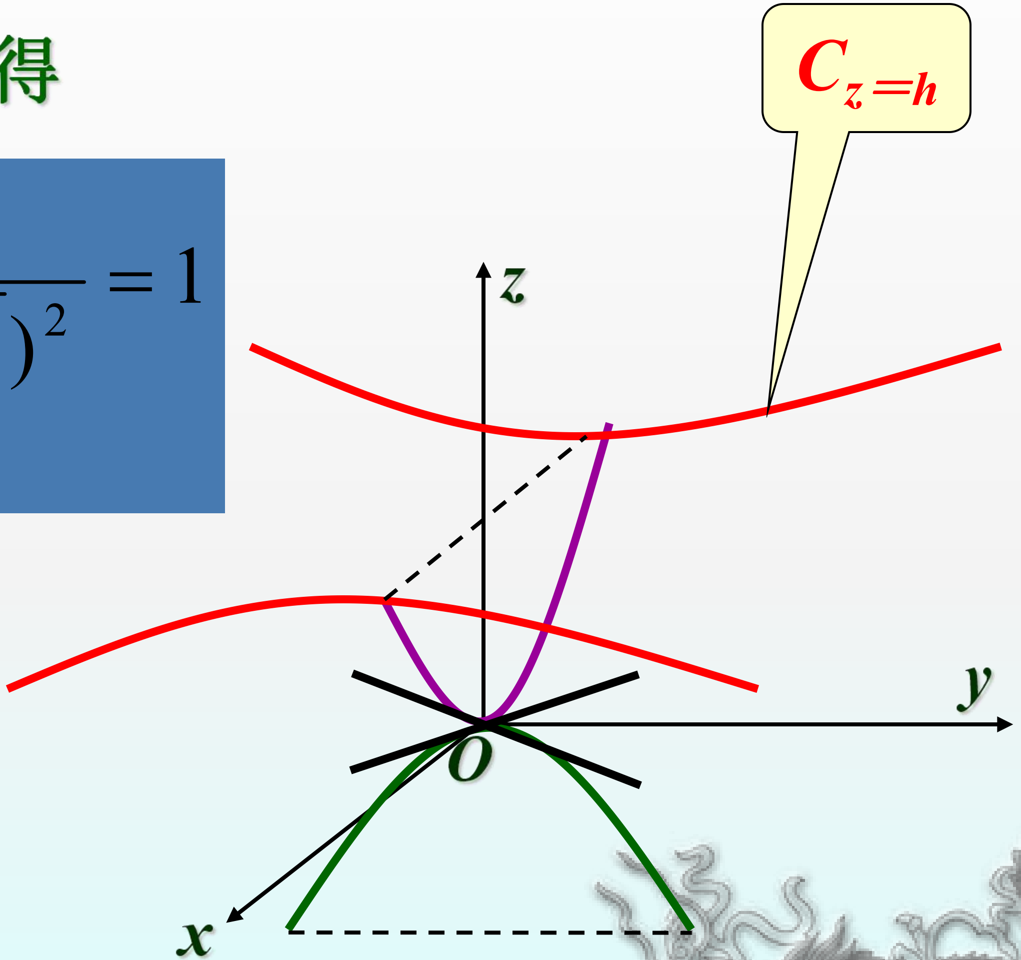
并且顶点坐标 $(\pm a\sqrt{2h}, 0, h)$

在主抛物线上：$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z, \\ y = 0 \end{cases}$

用平面$z=h$截割曲面，得

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2}-\dfrac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2}=1 \\ z=h \end{cases}$

当$h>0$时



（2）当h<0时，z=h与双曲抛物的交线方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{y^2}{(b\sqrt{-2h})^2} - \dfrac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2} = 1 \\
z = h, (h < 0)
\end{cases}
$$

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{(b\sqrt{-2h})^2} - \dfrac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2} = 1 \\ z = h, (h < 0) \end{cases}$

实轴平行于y轴，实半轴为 → $b\sqrt{-2h}$

虚轴平行于x轴，虚半轴为 → $a\sqrt{-2h}$

顶点坐标为 → $(0, \pm b\sqrt{-2h}, h), h < 0$

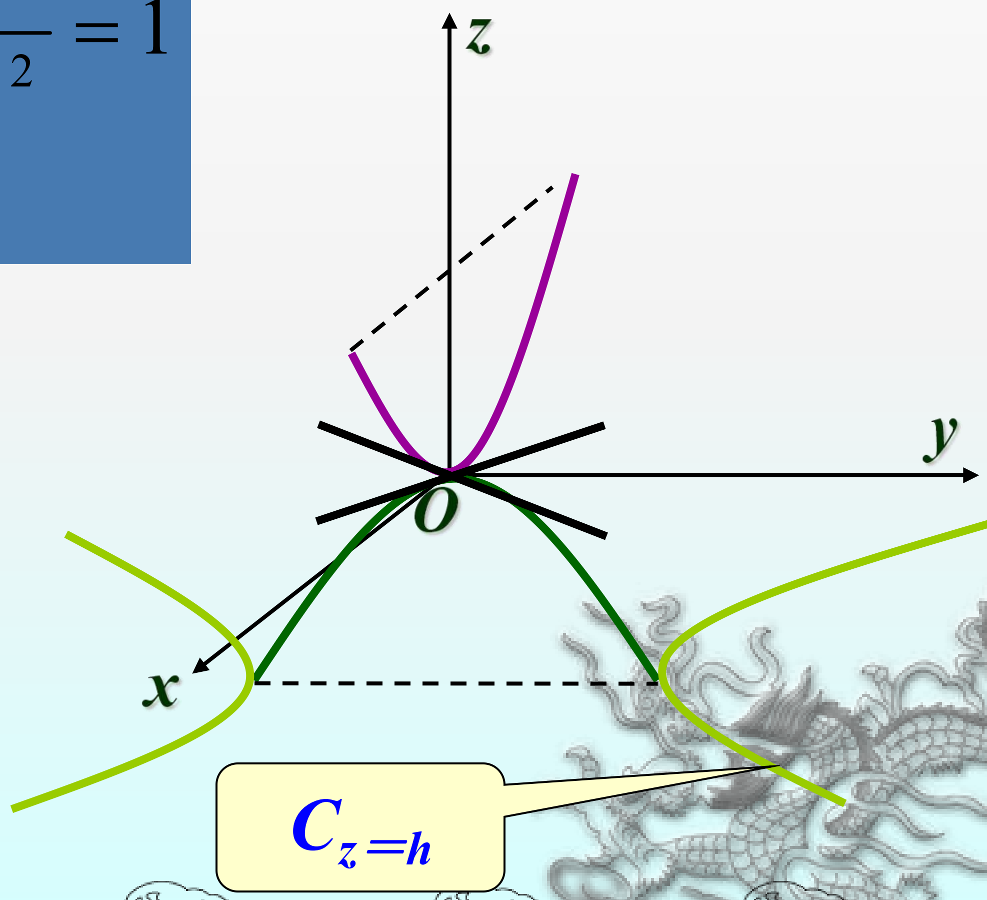
并且顶点坐标 $\left(0, \pm b\sqrt{-2h}, h\right)$

在主抛物线上：$\begin{cases} y^2 = -2b^2 z, \\ x = 0 \end{cases}$

用平面$z=h$截割曲面，得

双曲线
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2}-\dfrac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2}=1 \\ z=h \end{cases}$$

当$h<0$时



从这两对坐标

$$(\pm b\sqrt{2h}, 0, h), h > 0$$

$$(0, \pm a\sqrt{-2h}, h), h < 0$$

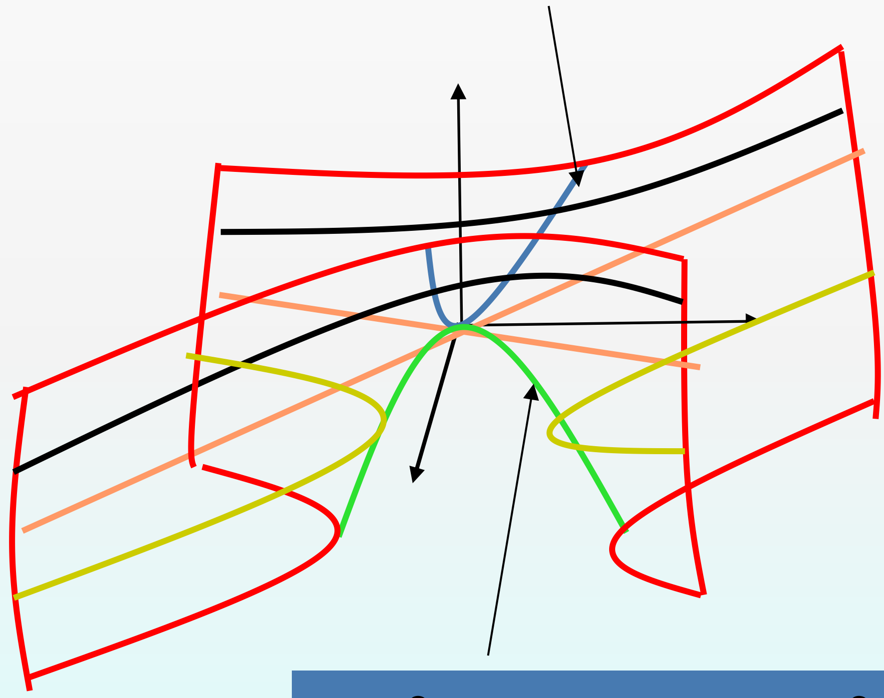
在两条主抛物线上可知

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z, \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = -2b^2 z, \\ x = 0 \end{cases}$$

双曲抛物面被xoy面分成两个部分，**h>0**时，顶点随**h**的增大而从**x**轴两个方向无限远离原点，且为上升趋势；**h<0时，则随-h的增大而从y轴**正向无限远离原点，且为下降趋势。

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z, \\ y = 0 \end{cases}$$



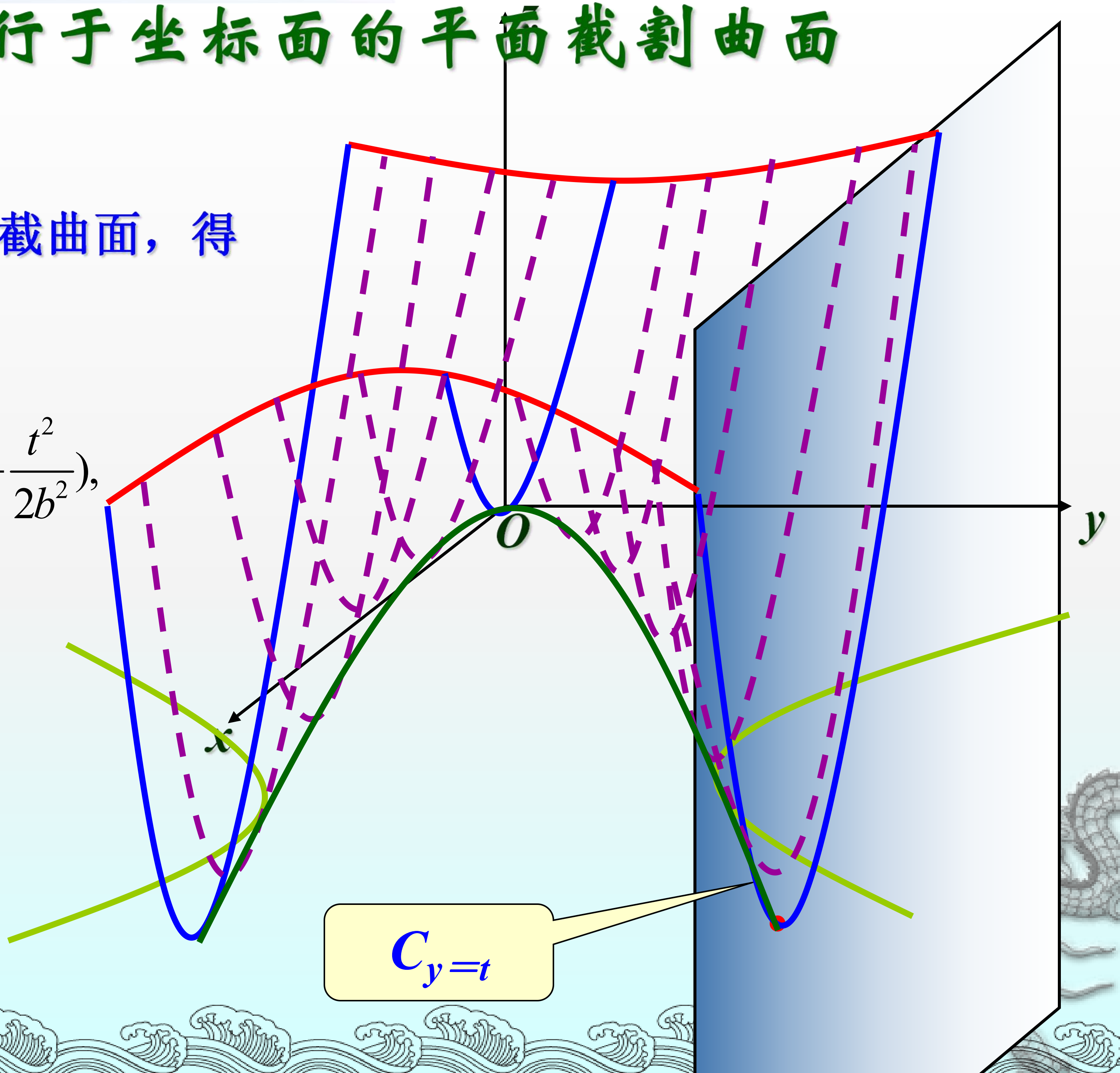
$$\begin{cases} y^2 = -2b^2 z, \\ x = 0 \end{cases}$$

四、用平行于坐标面的平面截割曲面

2.用平面$y=t$截曲面，得

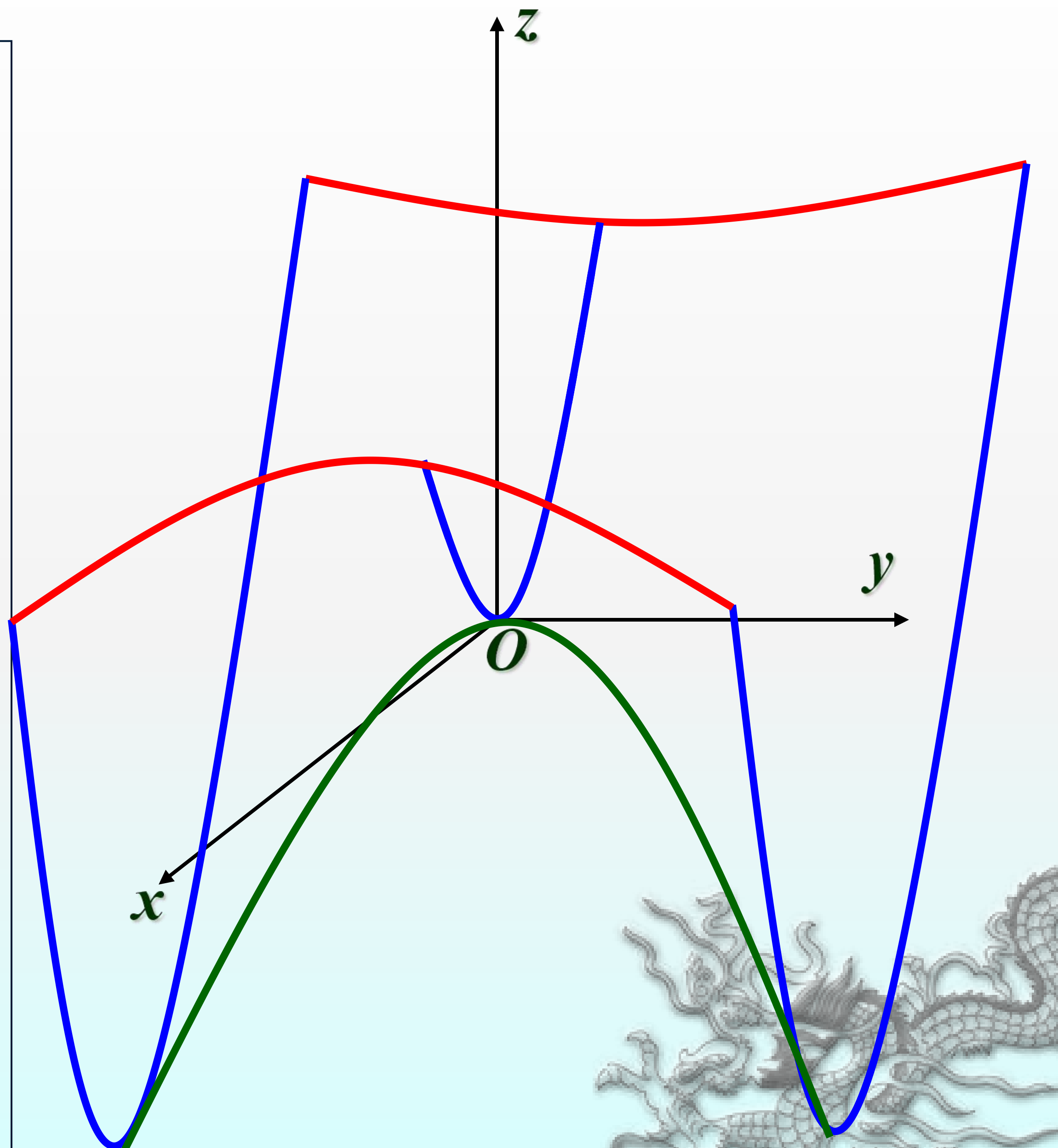
抛物线 $C_{y=t}$:

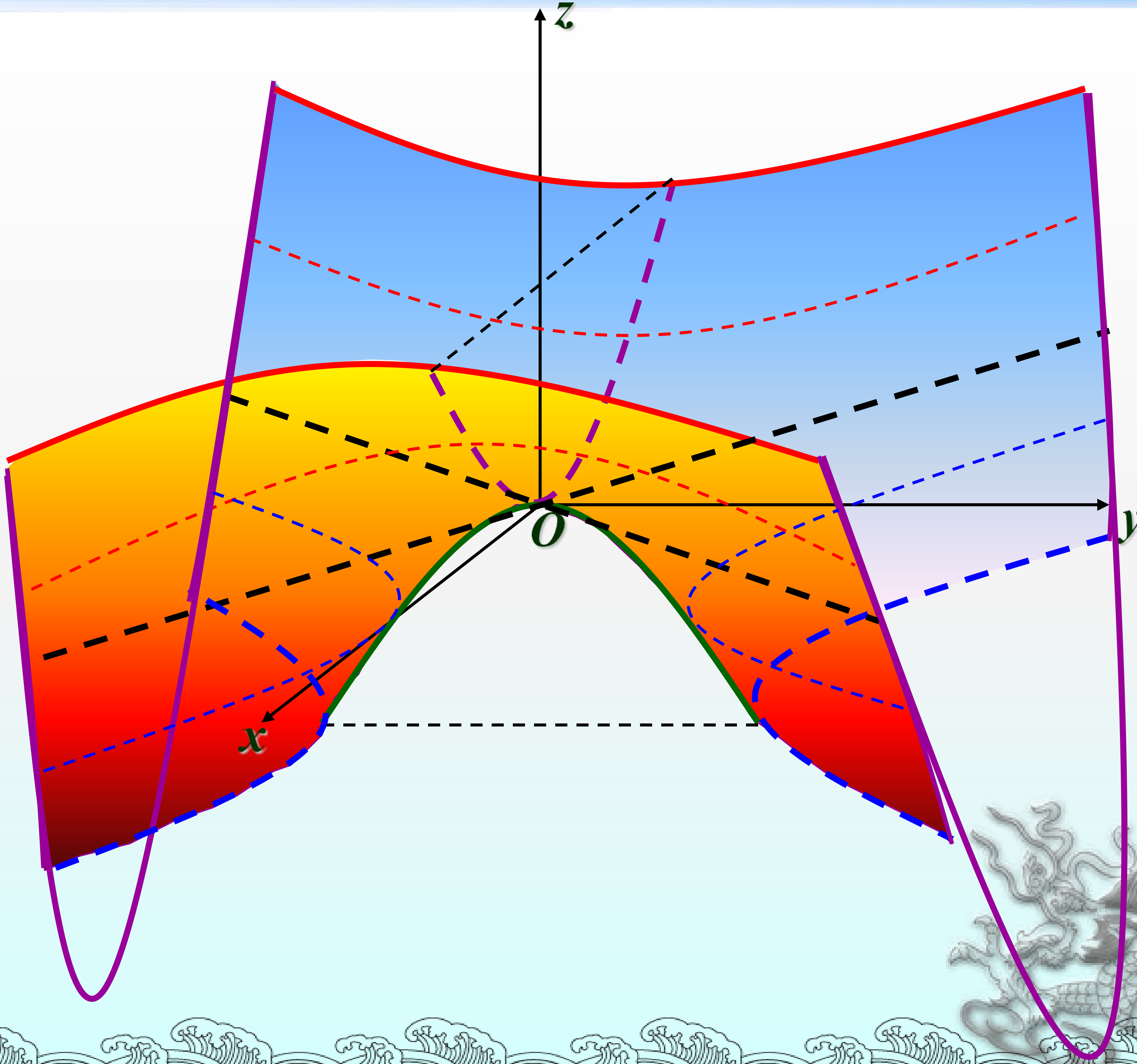
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z + \dfrac{t^2}{2b^2}\right), \\ y = t. \end{cases}$$

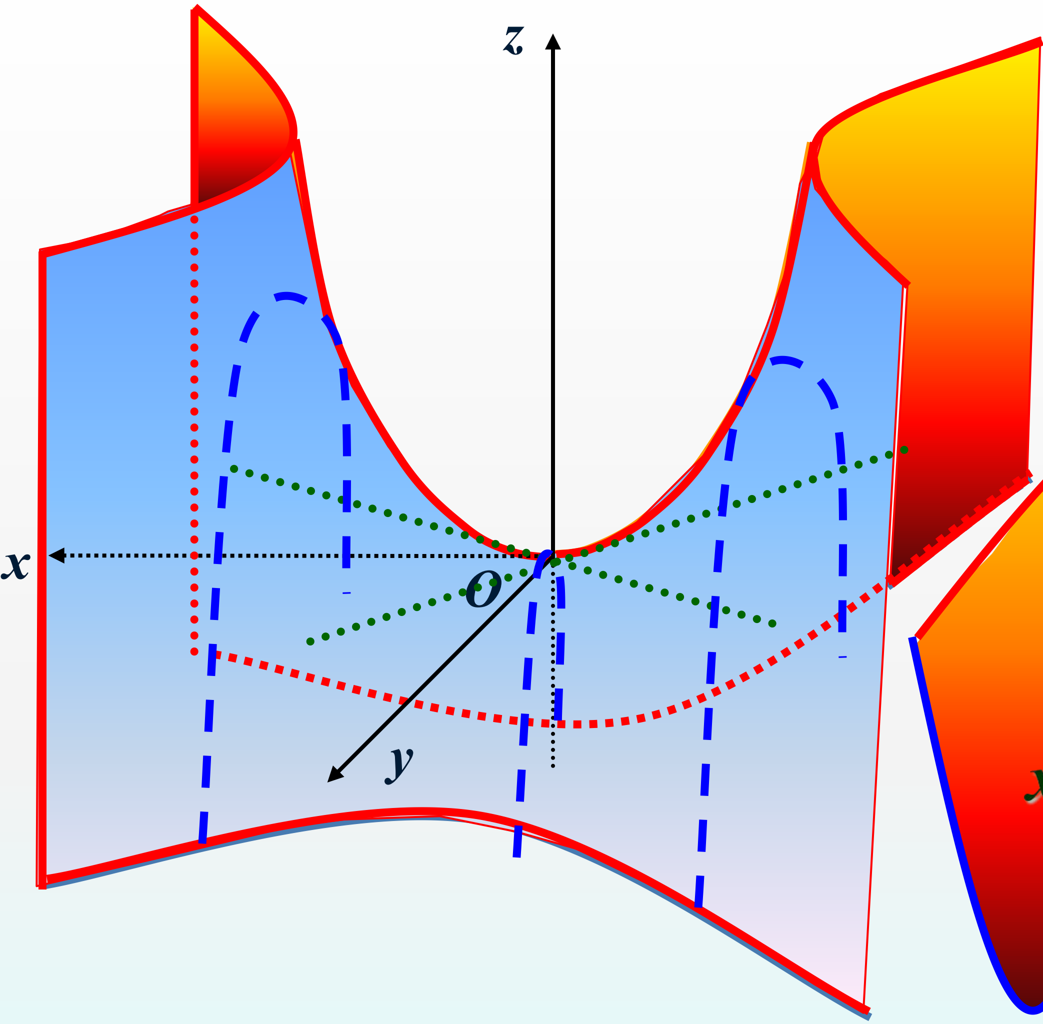


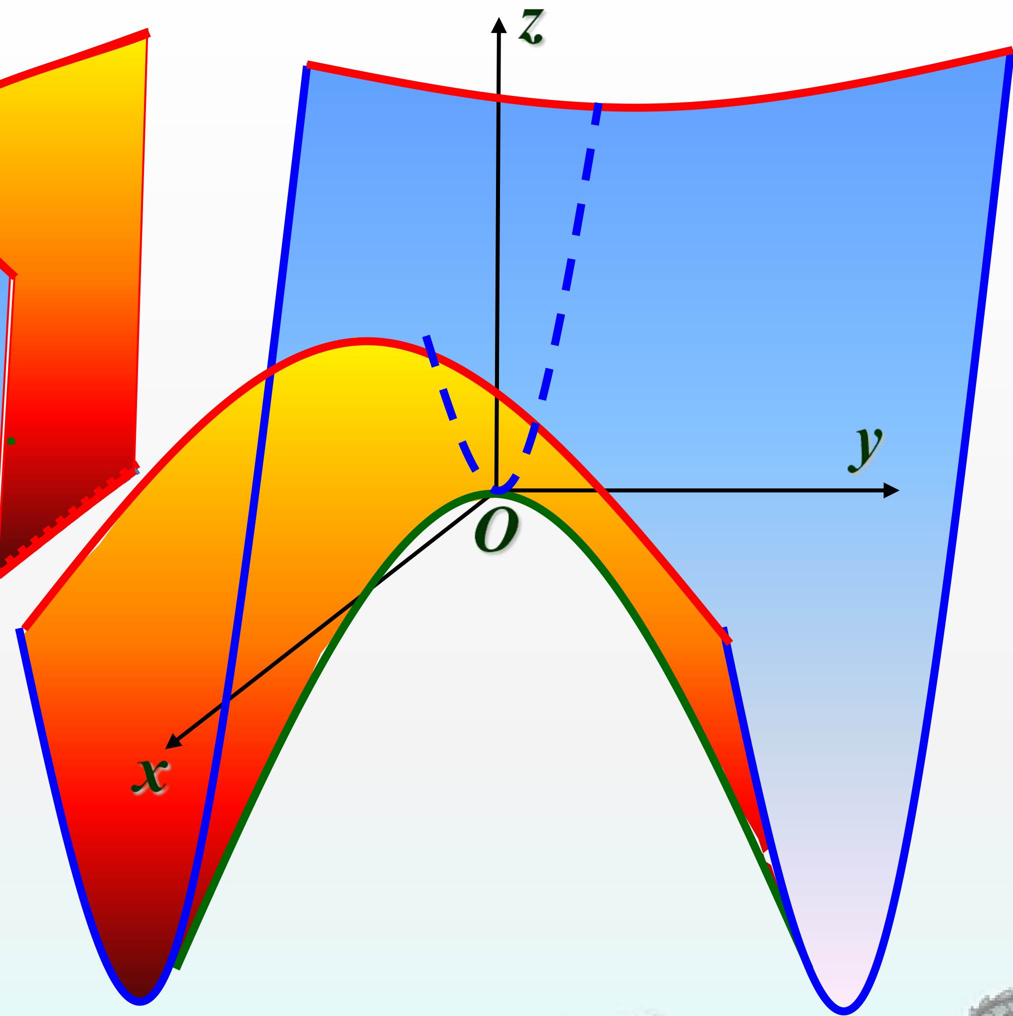
结论：

如果取两个这样的抛物线，它们的所在平面相互垂直，有公共的顶点与轴，而两抛物线的开口方向相反，让其中的一个抛物线平行于自己（即与抛物线所在的平面平行），且使其顶点在另一抛物线上滑动，那么前一抛物线的运动轨迹便是一个双曲抛物面。




z
y
O
x





双曲抛物面的大体形状形如马鞍，故也称作马鞍面。

六、课堂小结

1. 用平行于x=t的平面来截割双曲抛物面时，与用平行于y = k的平面来截割曲面结果是完全类似的。

2. 用平行截割法对曲面进行截割时，要注意表示平面常数h的取值范围。

思考题:

试验证双曲抛物面的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(u-v), \\ z = 2uv, \end{cases}$$

式中 u,v 为参数.