文山學院
WENSHAN UNIVERSITY

第 4 章　线性方程组

第 4 节　线性方程组解的结构（一）

主要内容

- 问题的提出
- 定义，如何求基础解系
- 例题巩固
- 小结、提出进一步的思考

一、问题的提出

(1)齐次线性方程组$AX=0$解的和，是该方程组的解吗?

(2)齐次线性方程组$AX=0$解的k倍，是该方程组的解吗?

问题

齐次线性方程组有非零解，这样其解的个数是无穷多个，

能否用部分解表示所有的解?

二、齐次线性方程组的基础解系

定义 若齐次线性方程组 *AX*=0 的解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 满足：

(1) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关；

(2) 齐次线性方程组*AX*=0的任意一个解都可以由

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出.

则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 齐次线性方程组*AX*=0的一个**基础解系**.

若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组AX=0的一个基础解系，

则该方程组的任意 $X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$

基础解系的存在性与求法？？？

设齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 $r(A)=r\le n$,

1. 当r=n 时，因为齐次线性方程组$AX=0$只有零解，

所以此时该方程组没有基础解系.

2. 当$r<n$时，

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

齐次线性方程组 $AX=0$ 同解于

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} \cdots - b_{1n}x_n \\ x_2 = -b_{2,r+1}x_{r+1} \cdots - b_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} \cdots - b_{rn}x_n \end{cases}$$

其中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 是自由未知量，共有 n-r 个.

令$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}$得

方程组$AX=0$的**所有解**为

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}k_1 \cdots - b_{1n}k_{n-r} \\ x_2 = -b_{2,r+1}k_1 \cdots - b_{2n}k_{n-r} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -b_{r,r+1}k_1 \cdots - b_{rn}k_{n-r} \\ x_{r+1} = k_1 \\ x_{r+2} = k_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = k_{n-r} \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{1r+1} \\ -b_{2r+1} \\ \cdots \\ -b_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{1r+2} \\ -b_{2r+2} \\ \cdots \\ -b_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}; \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1n-r} \\ -b_{2n-r} \\ \cdots \\ -b_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

依次记这$\boldsymbol{n-r}$个解为$\boldsymbol{\eta_1}$，$\boldsymbol{\eta_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta_{n-r}}$.

(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是方程组的一组线性无关的解.

(2) 方程组的所有解 $X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$,

方程组 $AX=0$ 的解可由$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$线性表示.

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的基础解系.

定理 在齐次线性方程组有非零解的情形下,

它有基础解系, 并且基础解系所含解的个数等于

n−r, 这里 r 是系数矩阵的秩, n是未知量的个数.

例 求方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，

并用基础解系表示其所有的解.

解：对系数矩阵施行如下的初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \dfrac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \dfrac{4}{3}x_4 = 0. \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 分别记为η_1，η_2.

所以η_1，η_2是原方程组的一个基础解系，

其所有解$\mathbf{X}=k_1\eta_1 + k_2\eta_2$.

小 结

1. 齐次线性方程组的基础解系的定义.

2. 如何去求齐次线性方程组的基础解系?

思 考

1. 找一找非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解与它的导出组 $AX=0$ 的解关系?

2. 该如何用导出组 $AX=0$ 的解表示非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解?

文山學院
WENSHAN UNIVERSITY

谢谢！