



汇图网 www.huitu.com

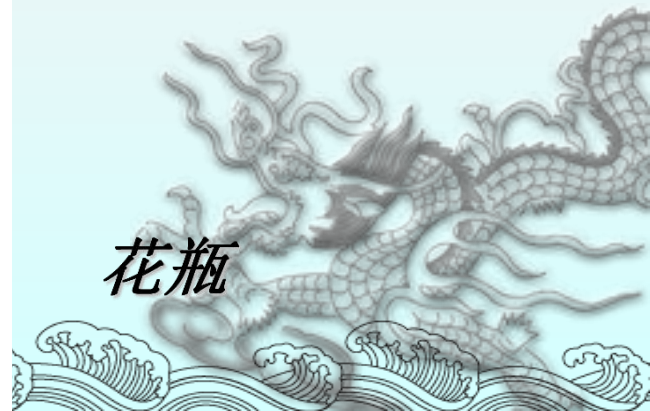
花篮



花瓶



工厂冷却塔



4.5 单叶双曲面

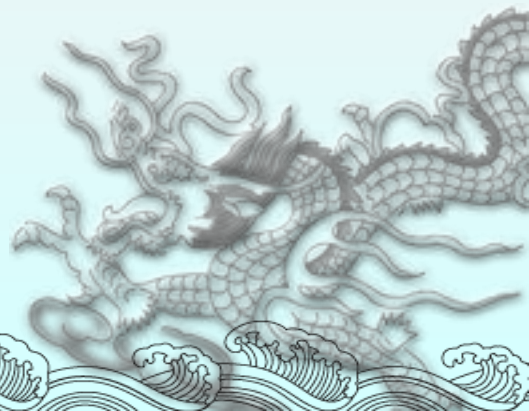


一、单叶双曲面的概念

1. 定义 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面。



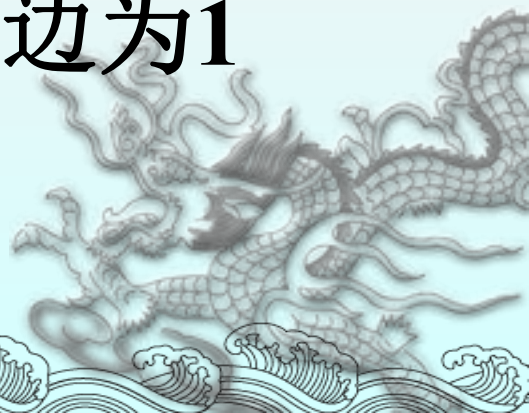
单叶双曲面的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

其中a,b,c为正常数

方程左边三项,两正一负,右边为1

特征:



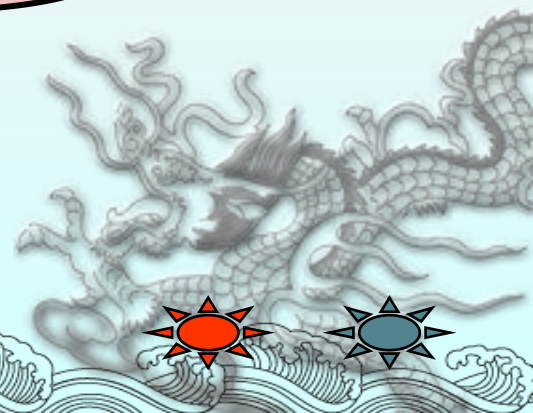
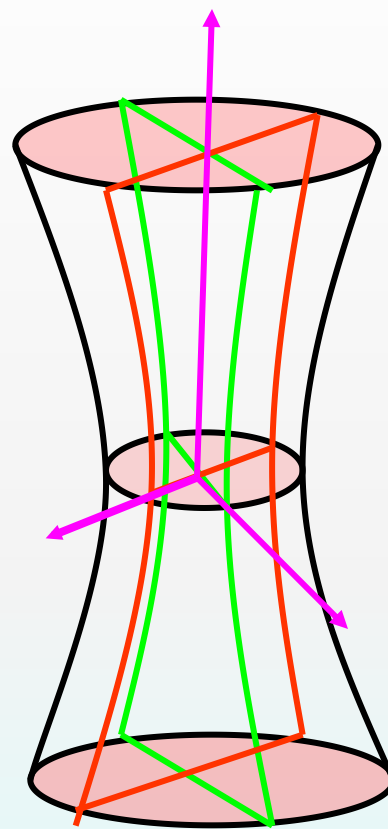
注：在直角坐标系下，方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 与 } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的图形也是单叶双曲面.



单叶双曲面的 基本图形



二、单叶双曲面的性质

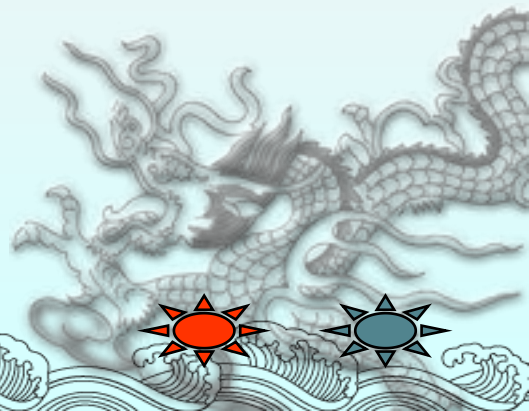
1. 对称性

单叶双曲面关于三坐标平面, 三坐标轴, 坐标原点都对称

事实上, 如果 (x, y, z) 满足方程, 则

(1) $(x, y, -z)$ 满足方程. 所以方程的图象关于 xoy 面对称. 同理关于 yoz 面、 xoz 面也对称.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



二、单叶双曲面的性质

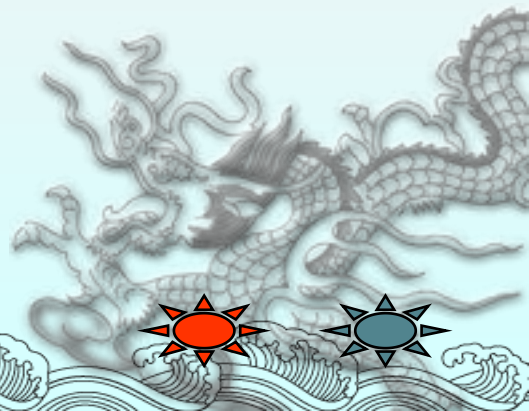
1. 对称性

单叶双曲面关于三坐标平面, 三坐标轴, 坐标原点都对称

(2) $(x, -y, -z)$ 满足方程. 所以方程的图象关于 x 轴对称. 同理关于 y 轴、 z 轴也对称.

(3) $(-x, -y, -z)$ 满足方程. 所以方程的图象关于原点对称.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



二、单叶双曲面的性质

2. 交点

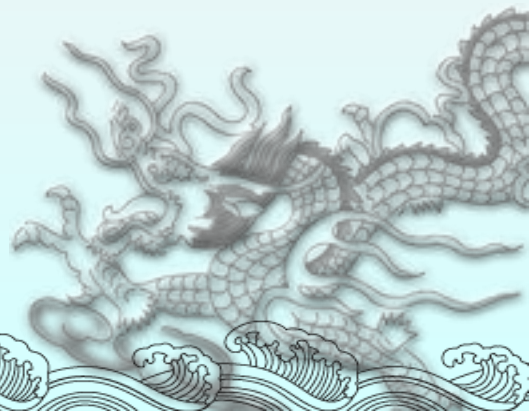
(令两个坐标为零,代入方程解第三个坐标)

与x轴交点: $(\pm a, 0, 0)$

与y轴交点: $(0, \pm b, 0)$

以上四点称为单叶双曲面的四个顶点

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

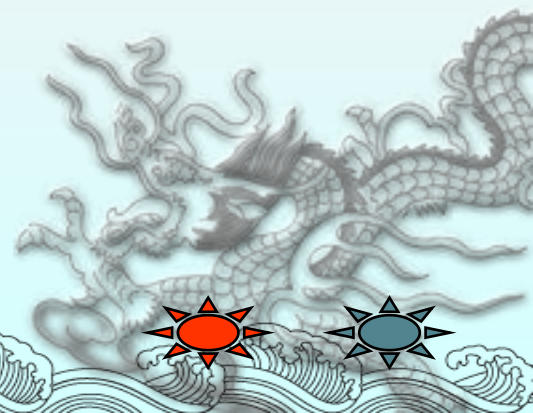


点 $(0,0,z)$, $(0,0,0)$ 不满足方程

单叶双曲面与 z 轴不相交

且不通过坐标原点.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



三、单叶双曲面与坐标平面的交线

(1) 用 $z = 0$ 截曲面

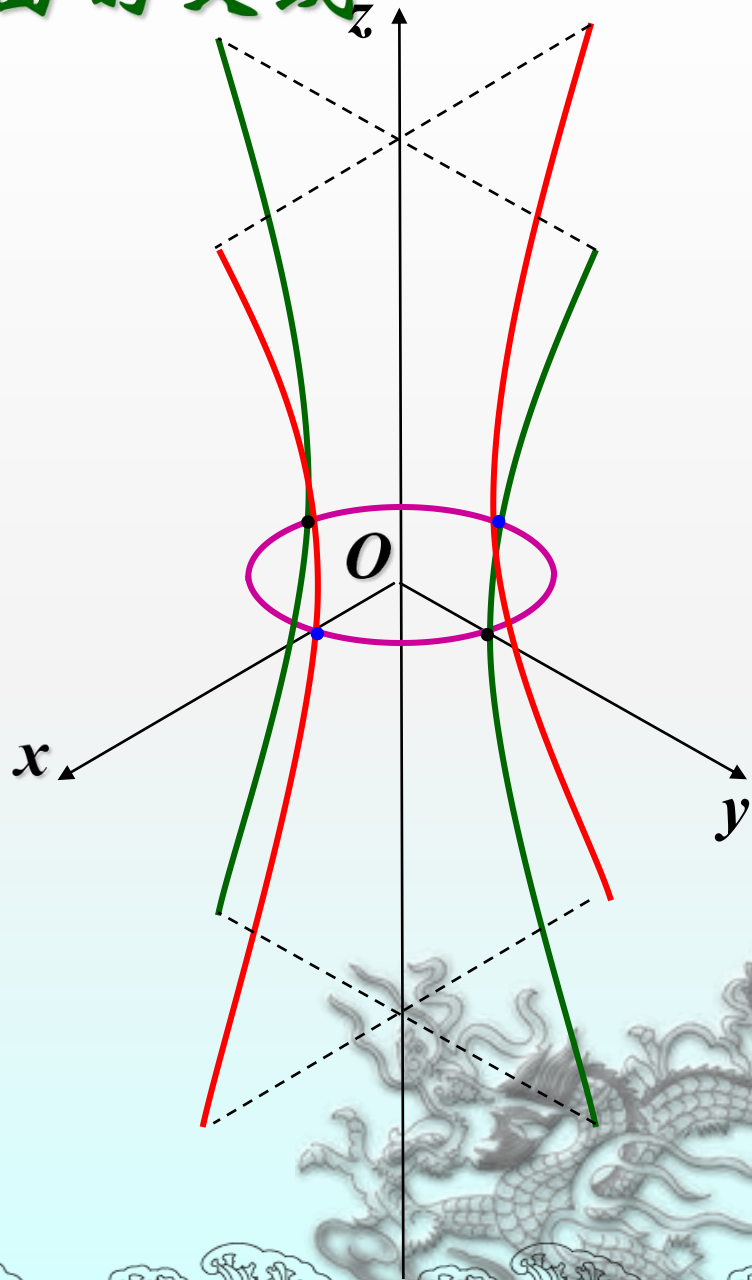
$$C_{z=0}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, & (\text{腰椭圆}) \\ z = 0; \end{cases}$$

(2) 用 $y = 0$ 截曲面

$$C_{y=0}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, & (\text{双曲线}) \\ y = 0; \end{cases}$$

(3) 用 $x = 0$ 截曲面

$$C_{x=0}: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, & (\text{双曲线}) \\ x = 0. \end{cases}$$



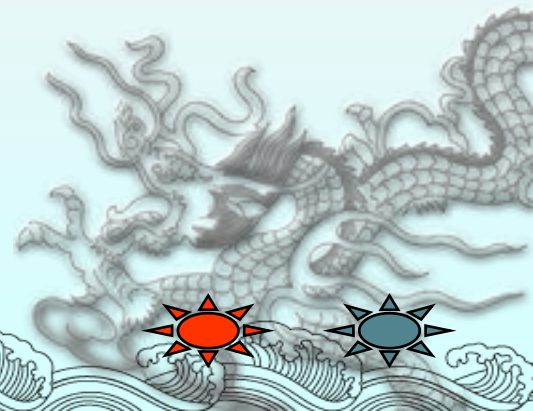
四、用平行于坐标平面的平面截割

1. 用平面 $z=h$ 去截单叶双曲面

则截线方程为

令 $Z=h$ \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} + 1 \\ Z=h \end{array} \right.$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



将截线方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} + 1$$

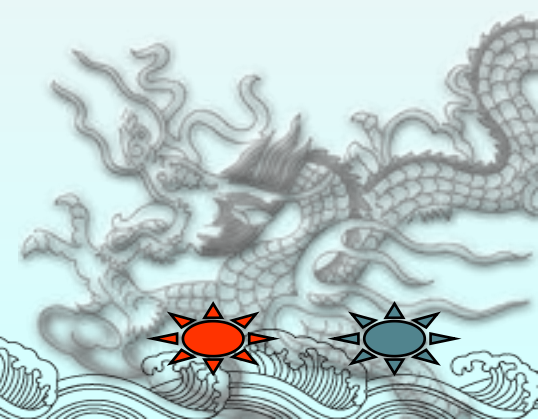
$$Z=h$$

变形为

$$\frac{x^2}{\left(a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}\right)^2} = 1$$

$$Z=h$$

交线为平面Z=h上的椭圆:



椭圆

$$\frac{x^2}{\left(a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}\right)^2} = 1$$

Z=h

半轴为

$$\longrightarrow a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}, b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}$$

顶点坐标为

$$\left(\pm a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}, 0, h\right), \left(0, \pm b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}, h\right)$$

将顶点坐标:

$$(\pm a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, 0, h), (0, \pm b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, h)$$

分别代入下列方程验证

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$y = 0$$

及

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$x = 0$$



说明椭圆

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z=h, \quad |h| < c \end{array} \right.$$

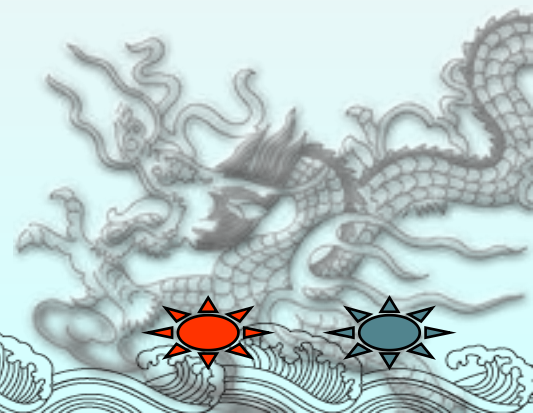
的四个顶点:

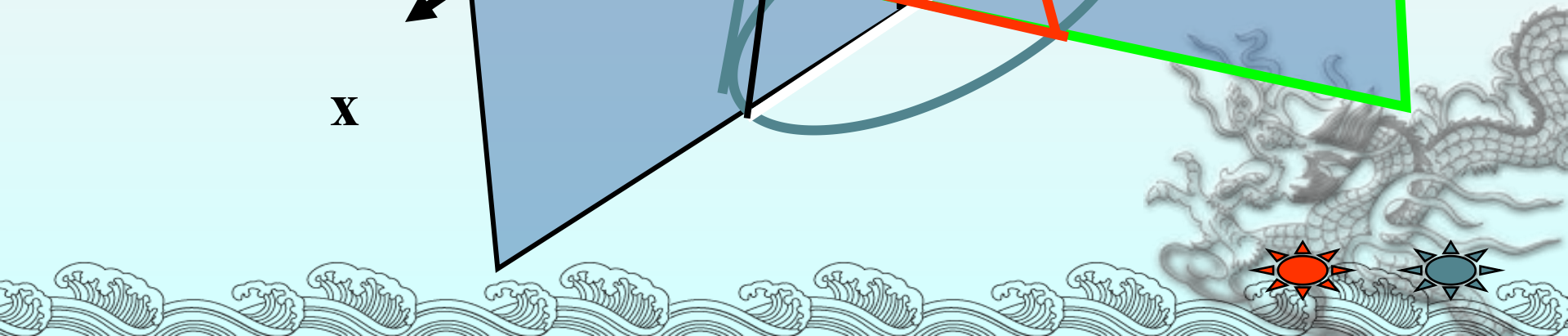
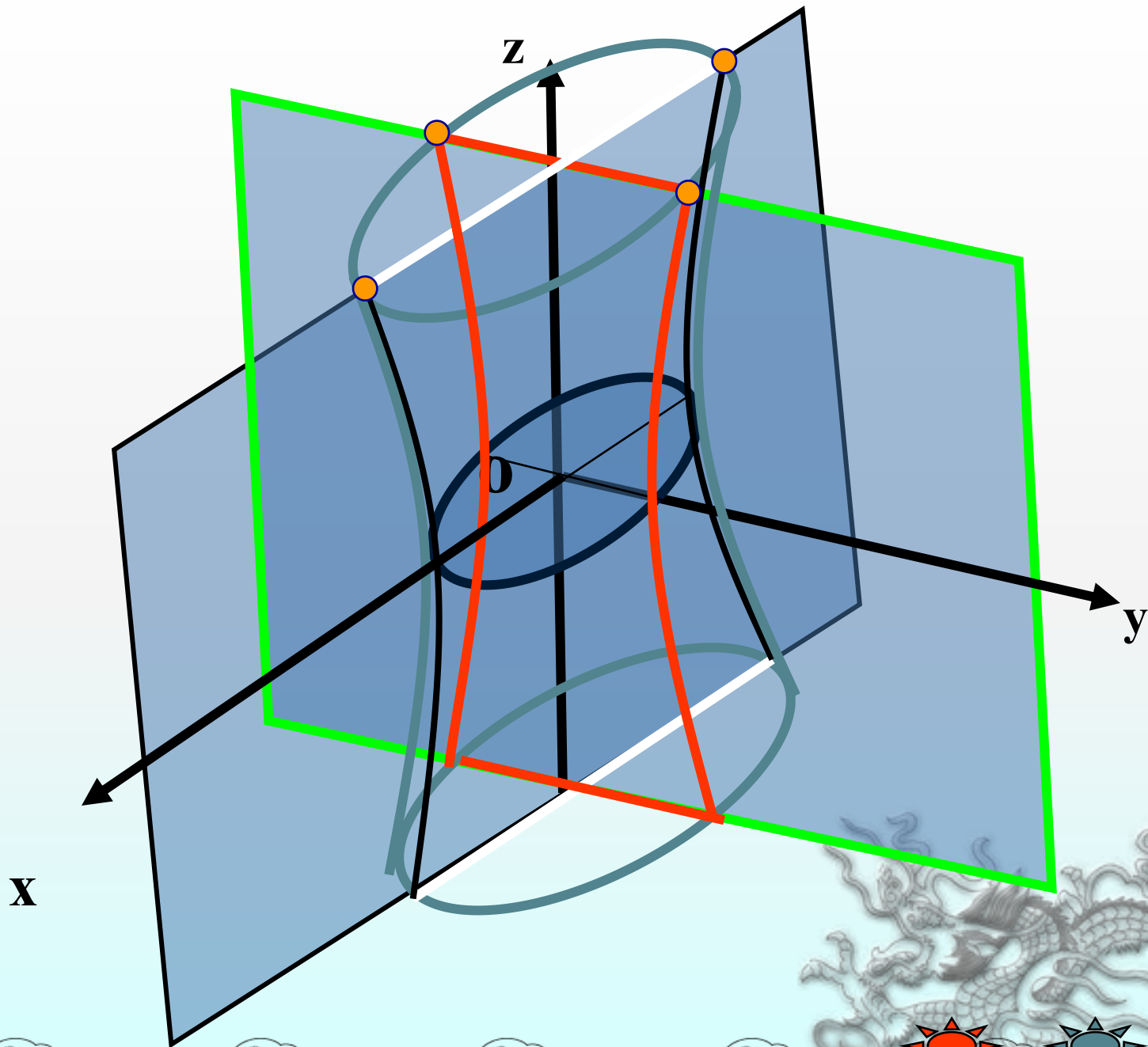
$$\left(\pm a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, 0, h\right), \left(0, \pm b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, h\right)$$

分别在

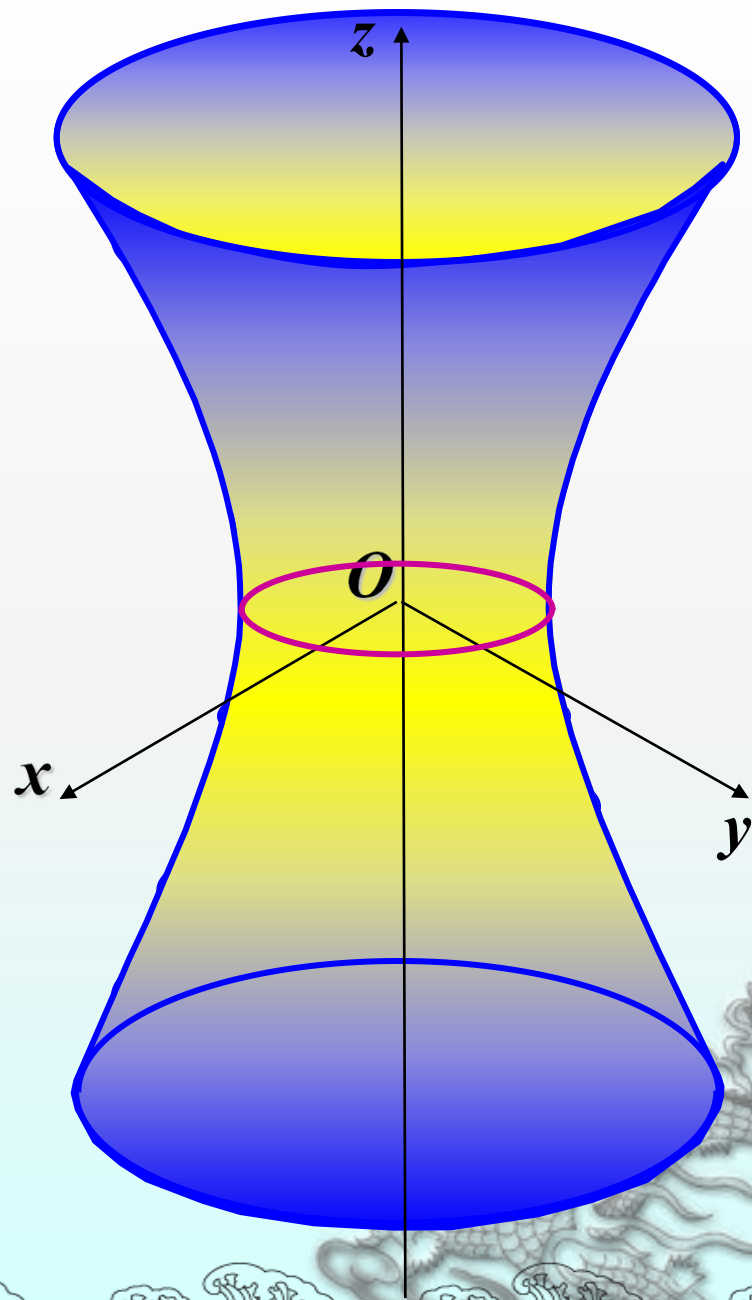
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

这两个主双曲线上.





结论：单叶双曲面可看作由一个椭圆的变动（大小位置都改变）而产生，该椭圆在变动中，保持所在平面与 xOy 面平行，且两对顶点分别在两主双曲线上滑动。



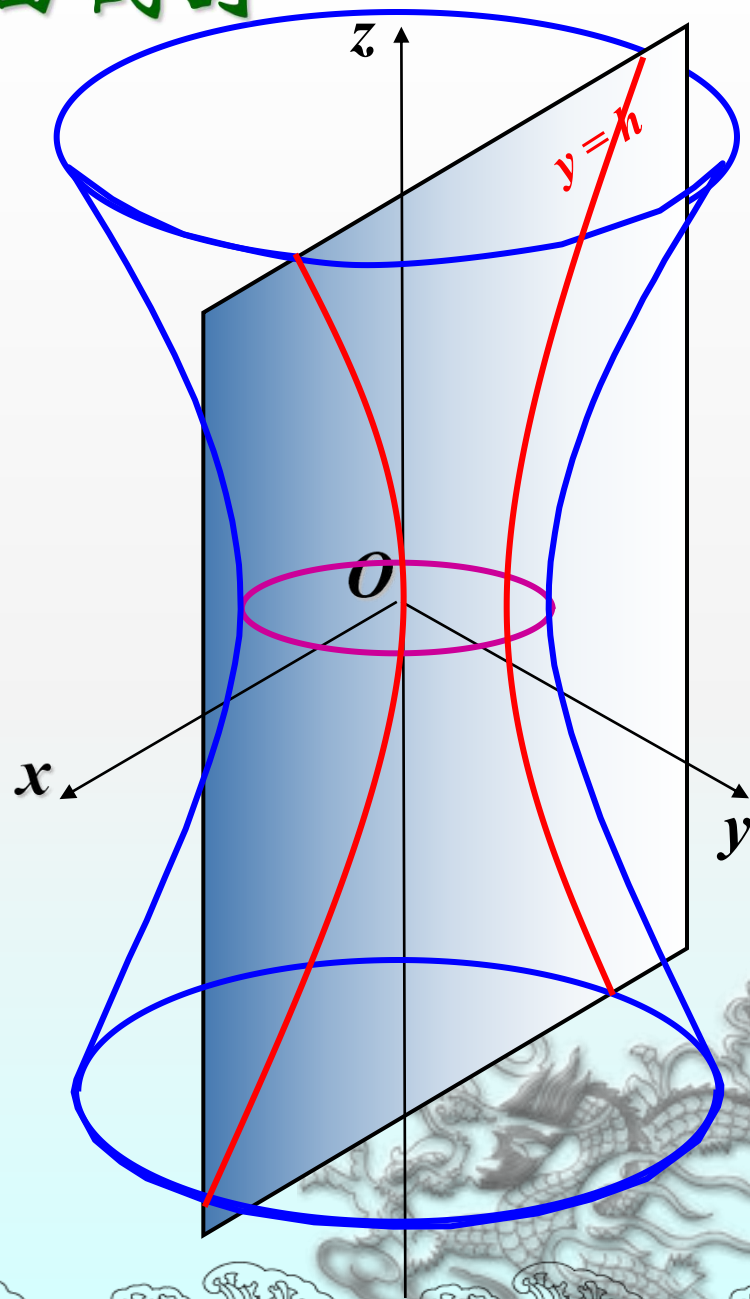
四、用平行于坐标面的平面截割

2. 用 $y = h$ 截曲面

$$C_{y=h}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

① 当 $|h| < b$ 时

截线为双曲线

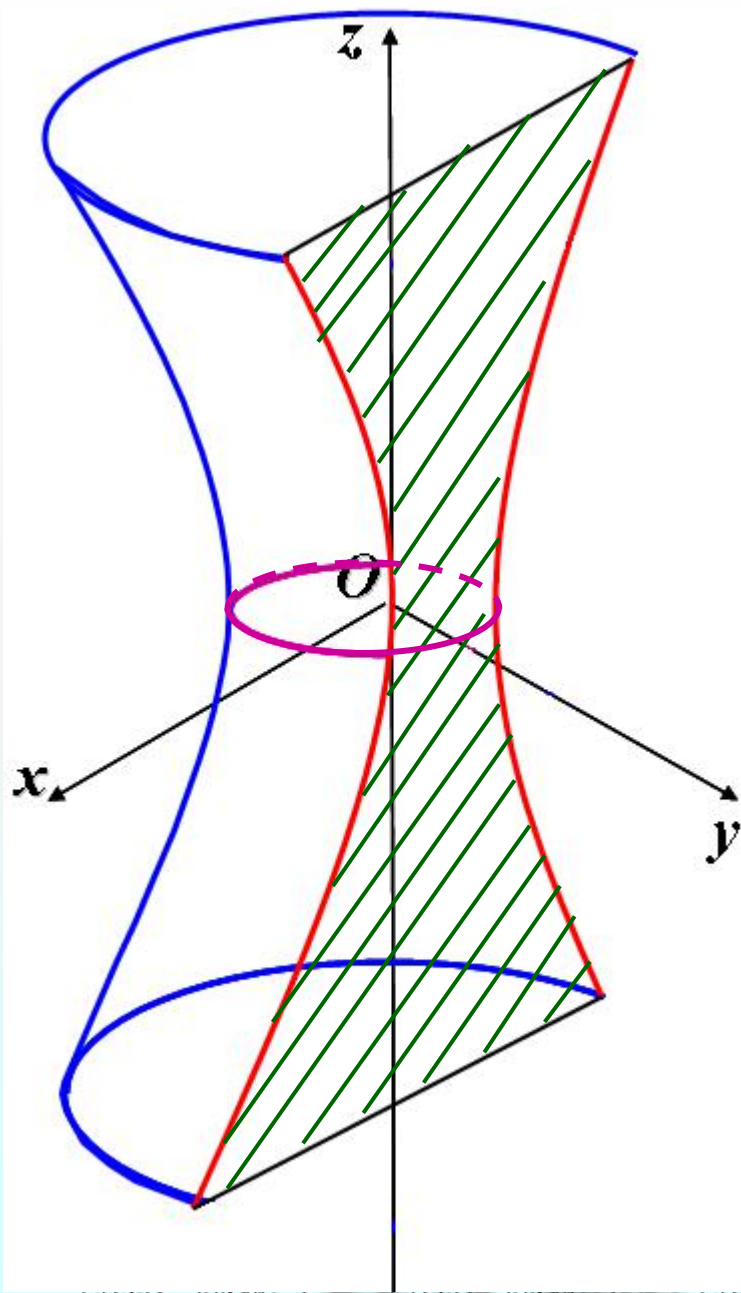


2. 用 $y = h$ 截曲面

$$C_{y=h}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

① 当 $|h| < b$ 时

截线为双曲线

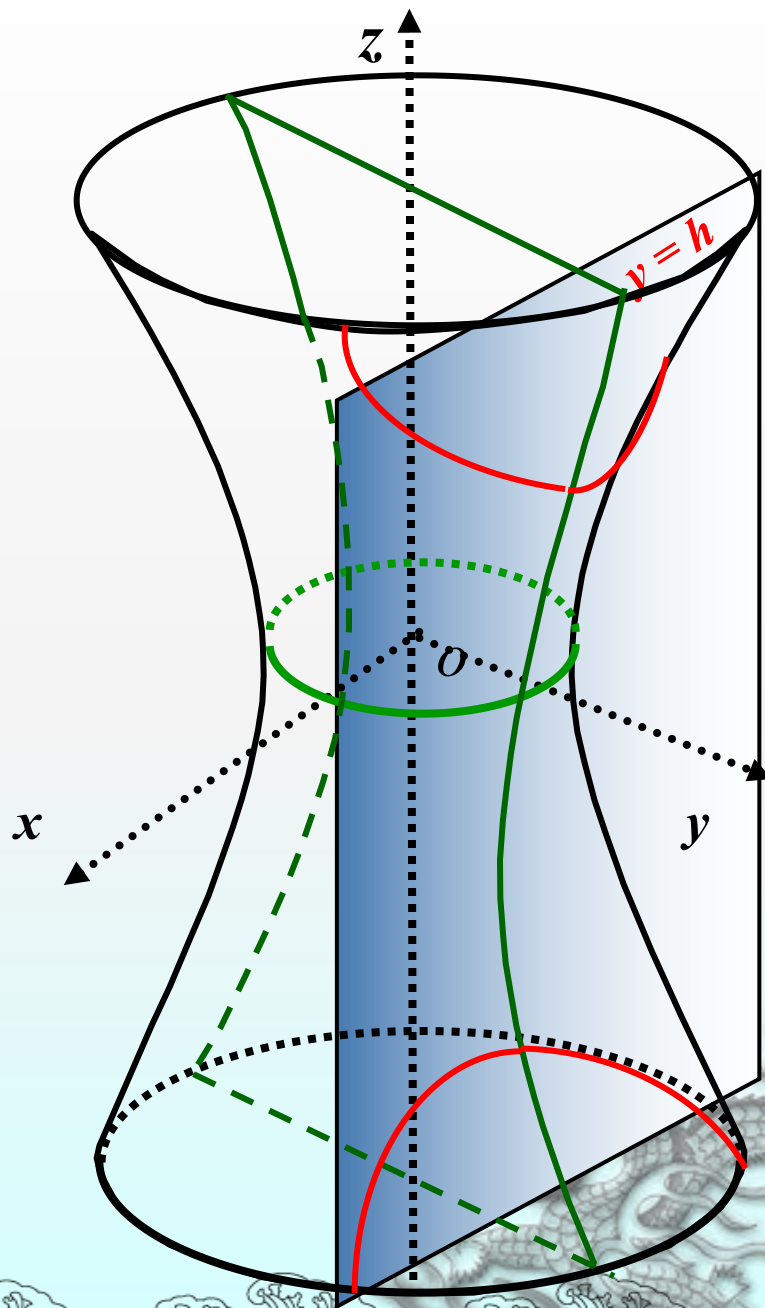


2. 用 $y = h$ 截曲面

$$C_{y=h} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

② 当 $|h| > b$ 时

截线为双曲线

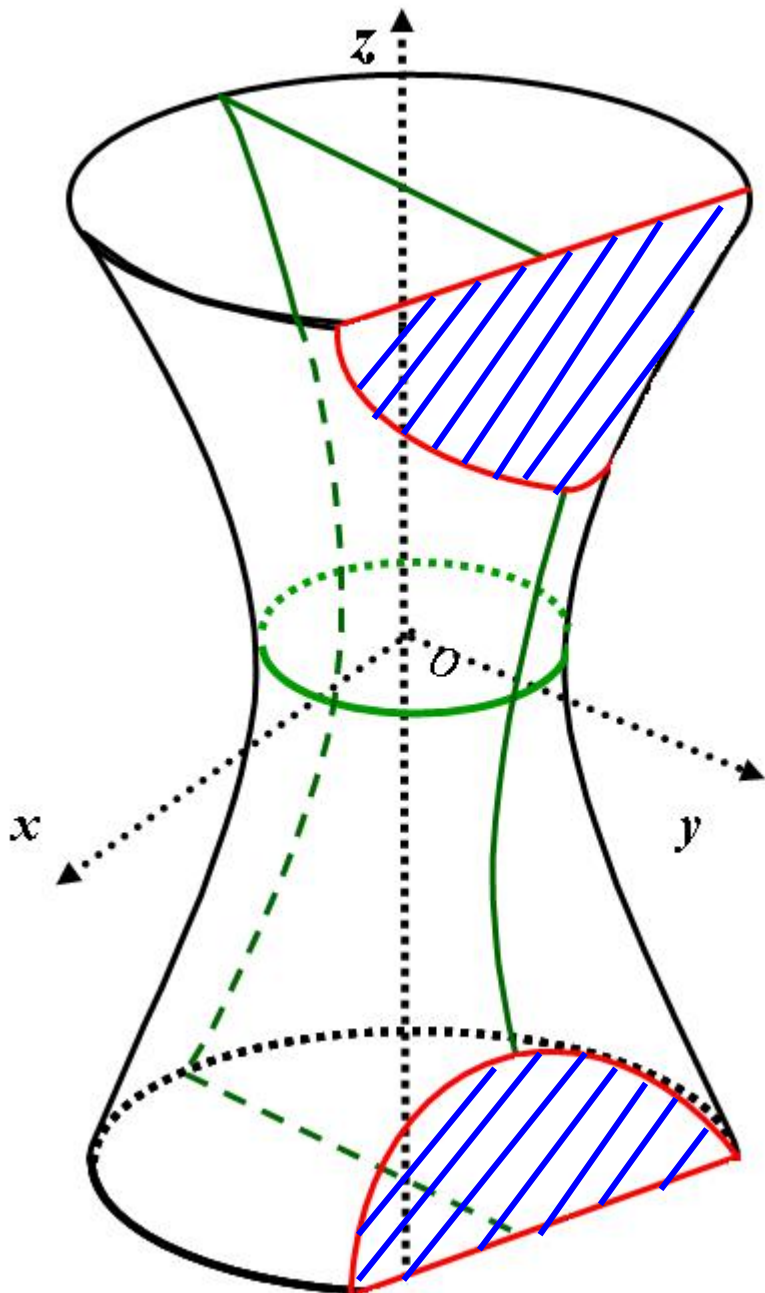


2. 用 $y = h$ 截曲面

$$C_{y=h} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

② 当 $|h| > b$ 时

截线为双曲线



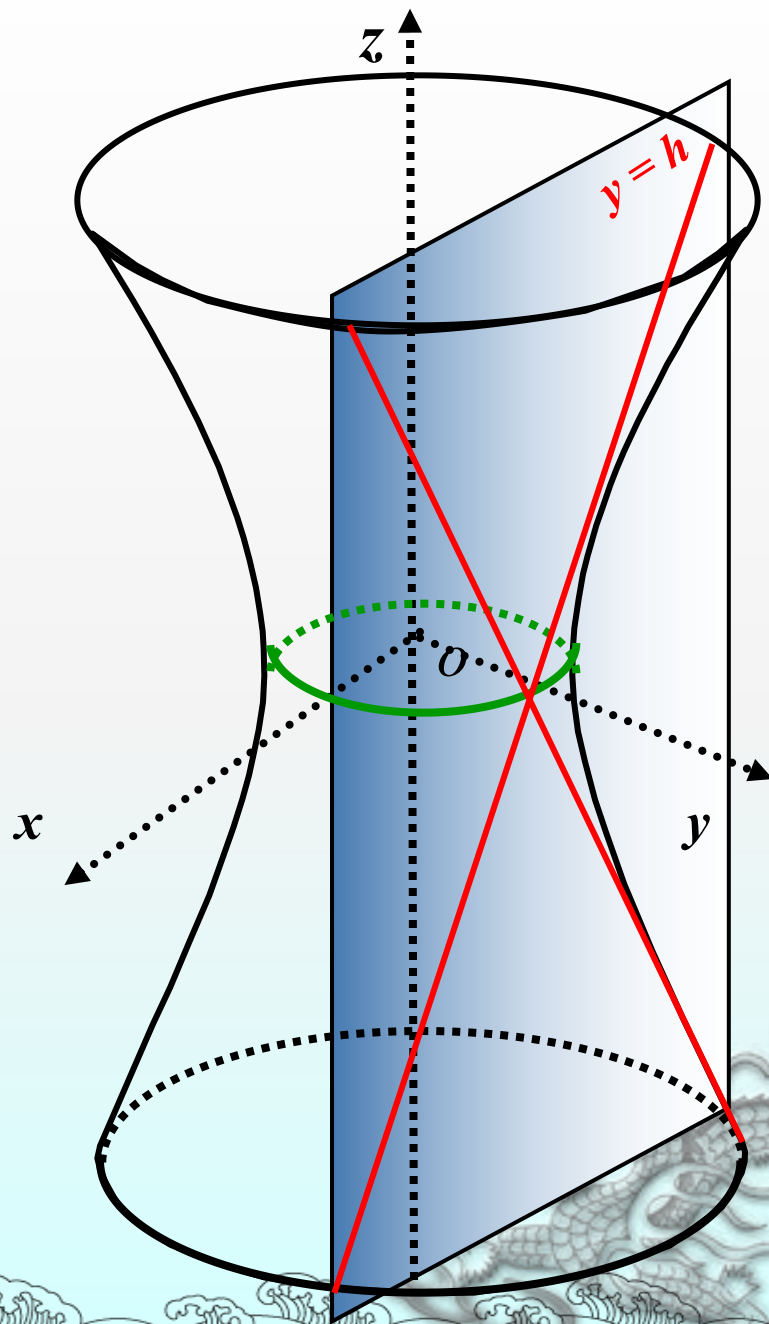
2. 用 $y = h$ 截曲面

$$C_{y=h} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

③ 当 $|h| = b$ 时

$$C_{y=h} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = h. \end{cases}$$

截线为两相交直线



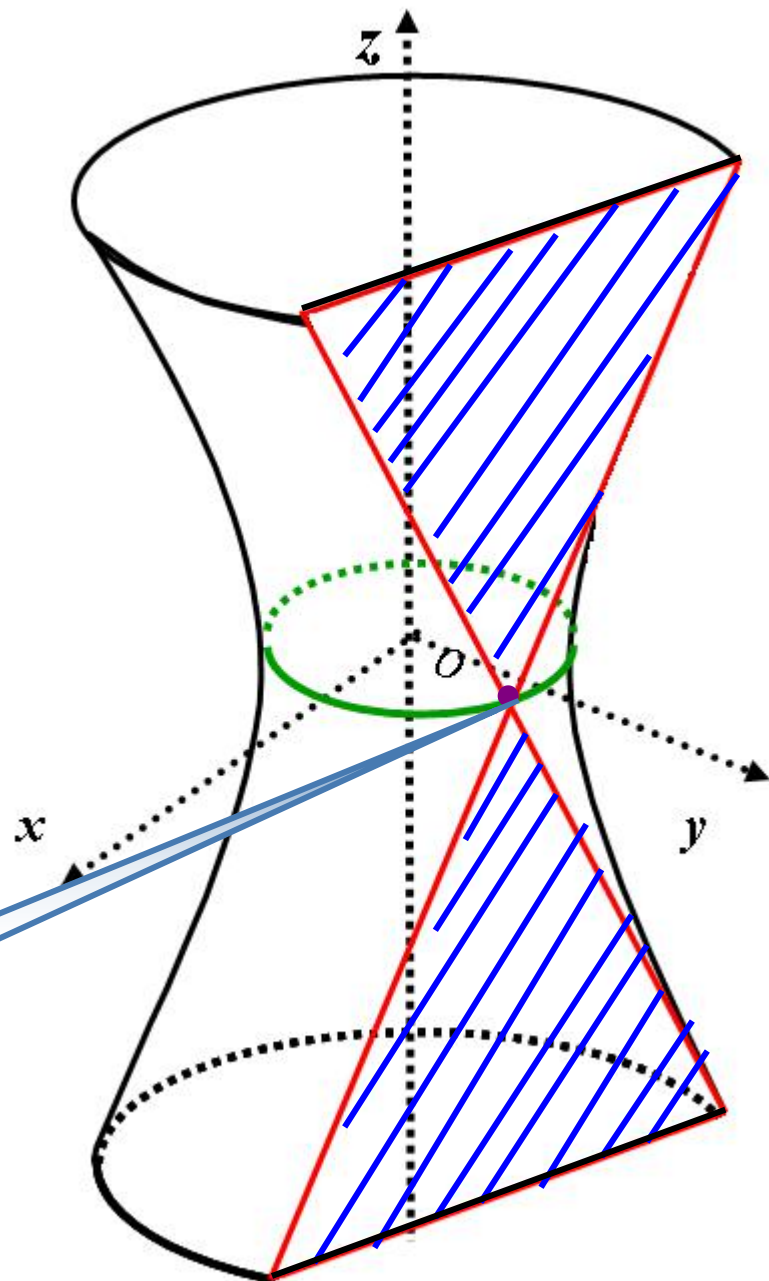
2. 用 $y = h$ 截曲面

$$C_{y=h}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = h. \end{cases}$$

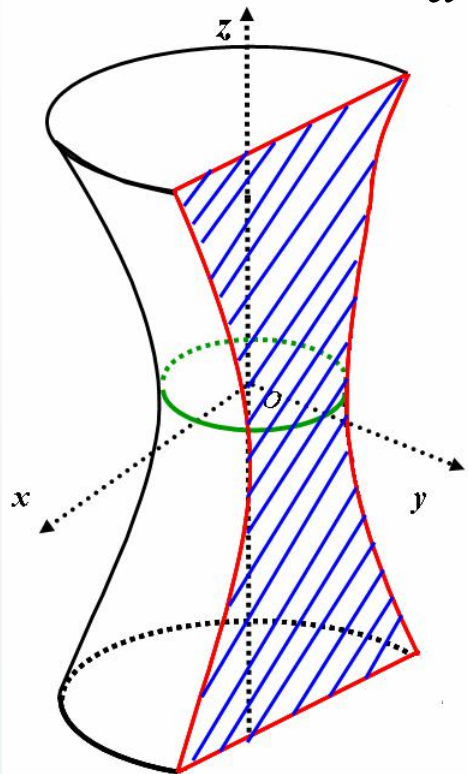
③ 当 $|h| = b$ 时

截线为两相交直线

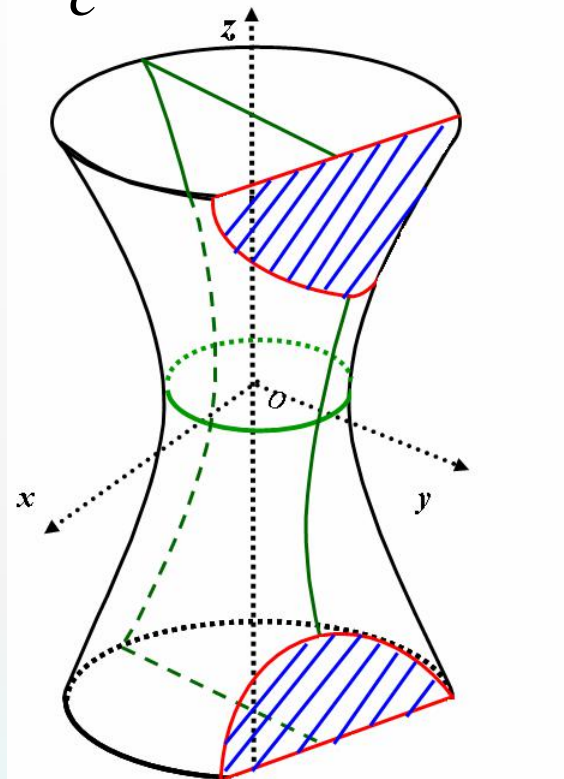
$(0, b, 0)$



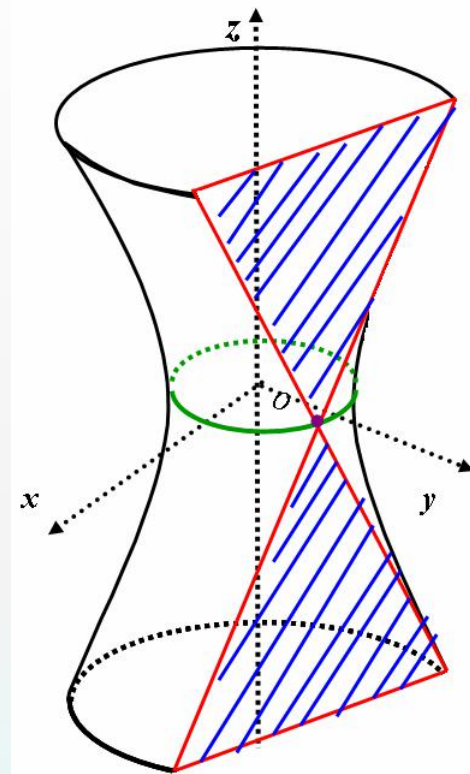
单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 用 $y = h$ 截曲面



①当 $|h| < b$ 时



②当 $|h| > b$ 时



③当 $|h| = b$ 时

$$C_{y=h}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

$$C_{y=h}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

$$C_{y=h}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = h. \end{cases}$$

当 $a = b$ 时,

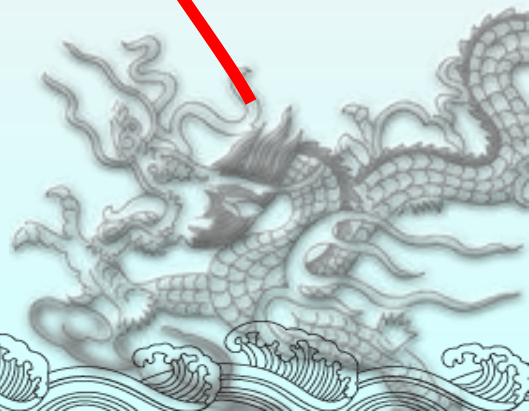
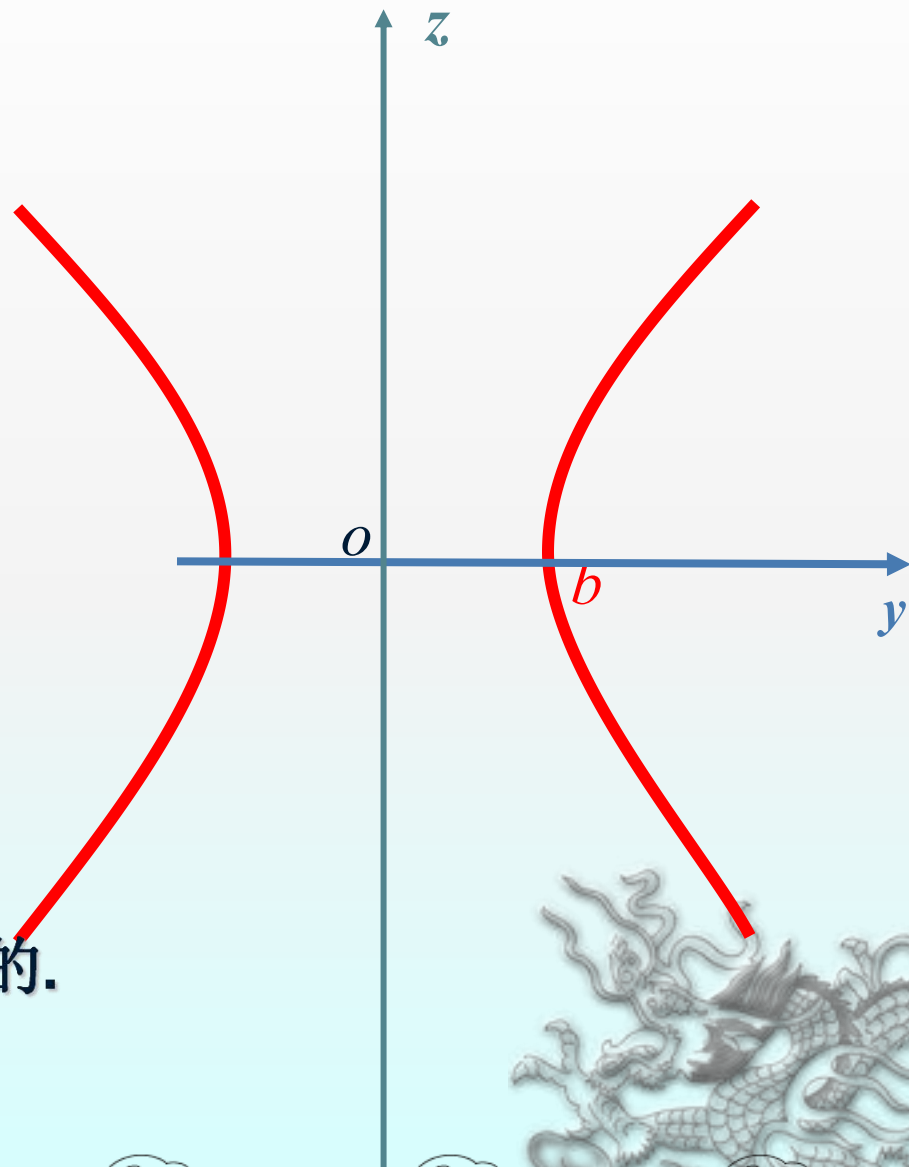
方程
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

变为
$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

此时的单叶双曲面是双曲

线
$$\Gamma: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕虚轴（即 z 轴）旋转形成的。



单叶旋转双曲面是单叶双曲面的特殊情形.

当 $a = b$ 时,

方程
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

变为
$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

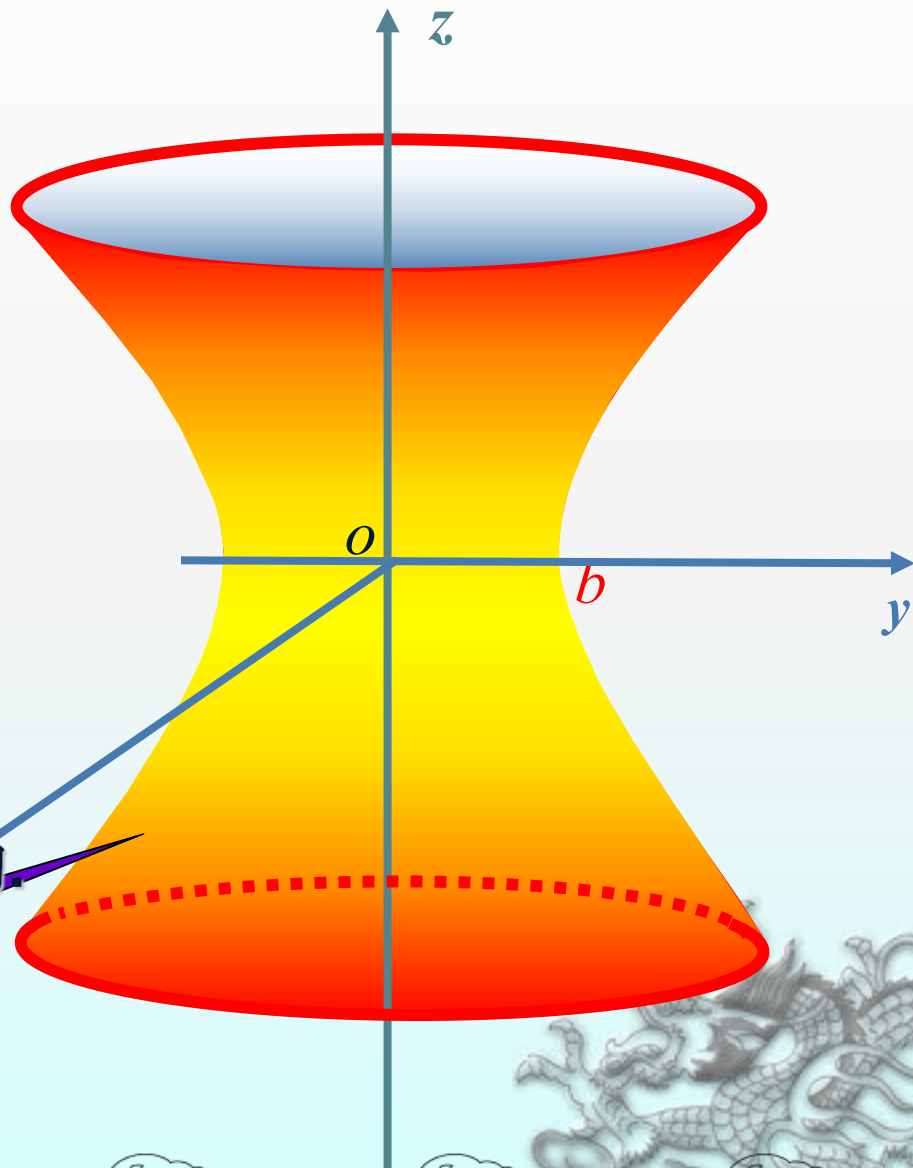
此时的单叶双曲面是双曲

线.

$$\Gamma: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕虚轴（即 z 轴）旋转形成的.

单叶旋转双曲面



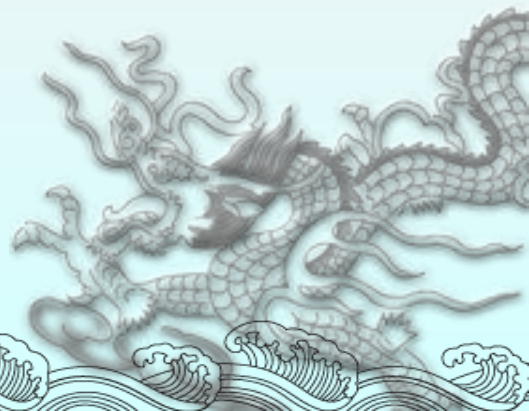
例 用一组平行平面 $z = h$ (h 为任意实数) 截割单叶双曲面

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b$) 得一族椭圆, 求这些椭圆焦点的轨迹.

分析: 这一族的椭圆方程为
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$
 从而椭圆焦点坐标为
$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{(a^2 - b^2) \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)}, \\ y = 0, \\ z = h. \end{cases}$$

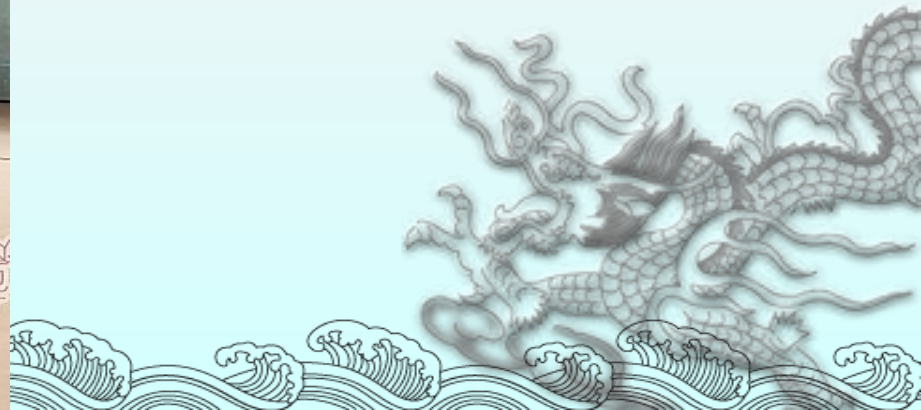
消去参数 h 得
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$



广州电视塔 一蛮腰



广州电视塔 一小蛮腰



五、课堂小结

1. 用平行于 $x=t$ 的平面来截割单叶双曲面时，与用平行于 $y = h$ 的平面来截割单叶双曲面结果是完全类似的。
2. 用平行截割法对曲面进行截割时，要注意表示平面常数 h 的取值范围。

