《高等代数（1）》期末考试　　试卷 A

任课教师________班级_______姓名________学号__________得分________

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 用 $x-2$ 除 $f(x)=x^4+2x^3-x+5$ 的余式为　　(　　)

A. 35　　B. -35　　C. $-35x$　　D. $35x$

2. 下列是多项式 $f(x)=4x^4-4x^3-3x^2+2x+1$ 的重因式是　　(　　)

A. $2x^2-x-1$　　B. $x-1$　　C. $2x-1$　　D. x^2+2x

3. 以下乘积中 5 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|$ 中取负号的项是　　(　　)

A. $a_{31}a_{45}a_{12}a_{24}a_{53}$　　B. $a_{45}a_{54}a_{42}a_{12}a_{33}$　　C. $a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}a_{14}$　　D. $a_{13}a_{32}a_{24}a_{45}a_{54}$

4. R^3 的向量 $\alpha_1=(1,-2,3),\alpha_2=(2,1,0),\alpha_3=(1,-7,9)$　　(　　)

A. 线性相关　B. 线性无关　C. 不确定　D. 可能线性相关也可能线性无关

5. 设 A 是任意一个 n 阶矩阵，下列矩阵是对称矩阵的是　　(　　)

A. AA^T　　B. A^T-A　　C. A^T-A　　D. A^2

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 的标准分解式为____________.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix}$ 中, b 的余子式为 24, 则 a =________________.

3. 如果线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_3=4 \\ 3x_1+2x_2-x_3=2 \\ x_2+4x_3=a \end{cases}$ 有解，那么 a =______________.

4. 设 $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$，$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$，求 $f(A)$ =________________.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$，则 $|B(2A-C)|=$____________.

三、计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 如果 $(x-1)^2 \mid ax^4+bx^2+1$，求 a,b.

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0\end{vmatrix}$.

3. 求齐次线性方程组 $\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$ 的基础解系，并用基础解系表示该方程组的所有解.

4. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

四、证明题（共 30 分）

1. 如果 $AB=BA, AC=CA$，证明：$A(B+C)=(B+C)A,\ A(BC)=(BC)A$. (7 分)

2. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r$，证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意$r$个线性无关的向量都构成它的一个极大无关组．(7 分)

3. 证明：$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$. (8 分)

4. 证明：如果$(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$，那么$(f(x), g(x)h(x)) = 1$. (8 分)