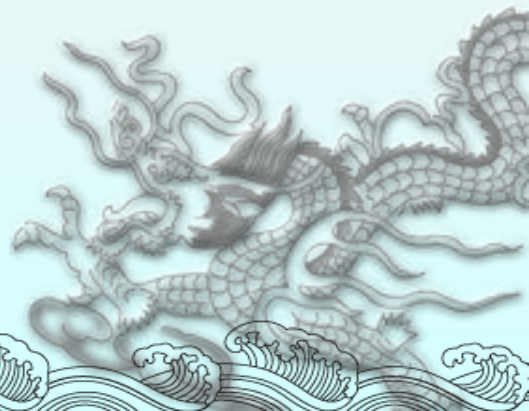
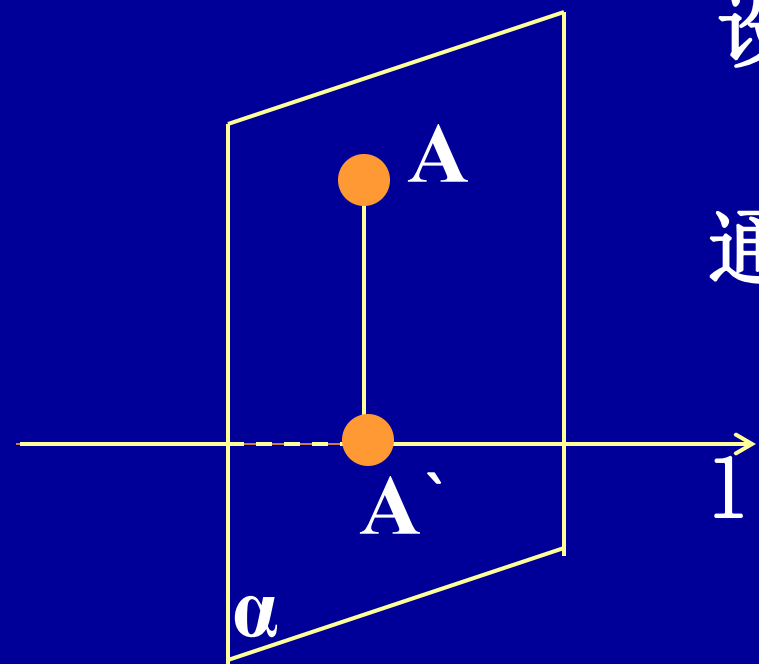


# 1.6 向量在轴上的射影



# 一、 向量在轴上的射影

## 1. 点在轴上的射影



设已知空间一点  $A$  及一条轴  $l$ ,

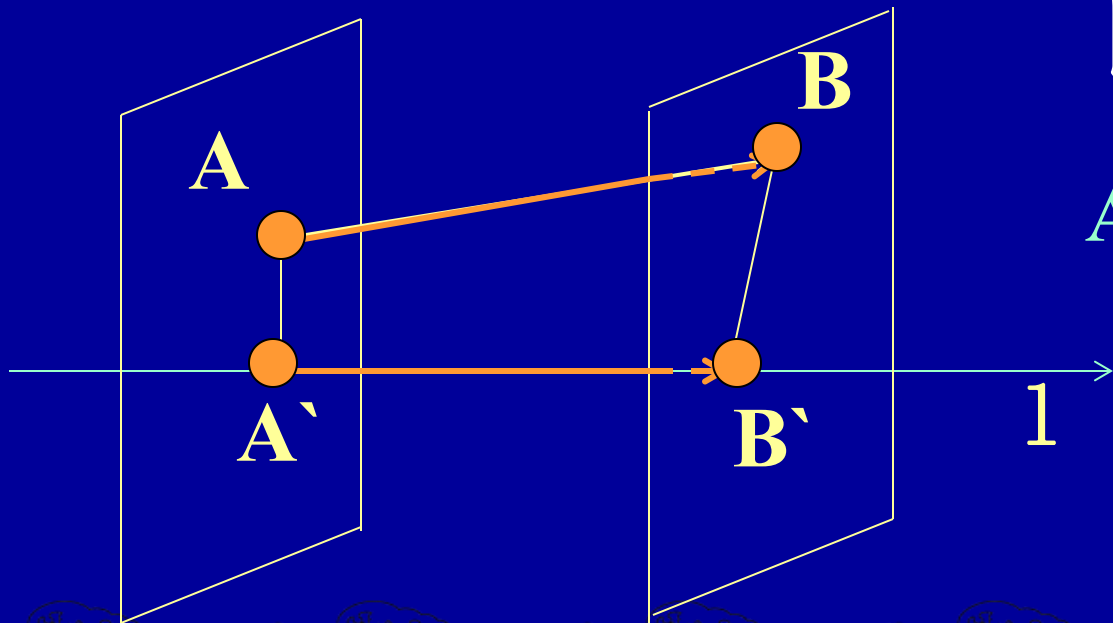
通过  $A$  作垂直于轴  $l$  的平面  $\alpha$ ,

平面  $\alpha$  与轴  $l$  的交点  $A'$

叫做点  $A$  在轴  $l$  上的射影

## 2. 向量在轴上的射影向量

**定义** 设向量 $\vec{AB}$ 的始点A和终点B在轴1上的射影分别为 $A'$ ,  $B'$ , 则向量 $\vec{A'B'}$ 叫做向量 $\vec{AB}$ 在轴1上的射影向量, 记做射影向量 $\vec{{}_1AB}$ 。



即

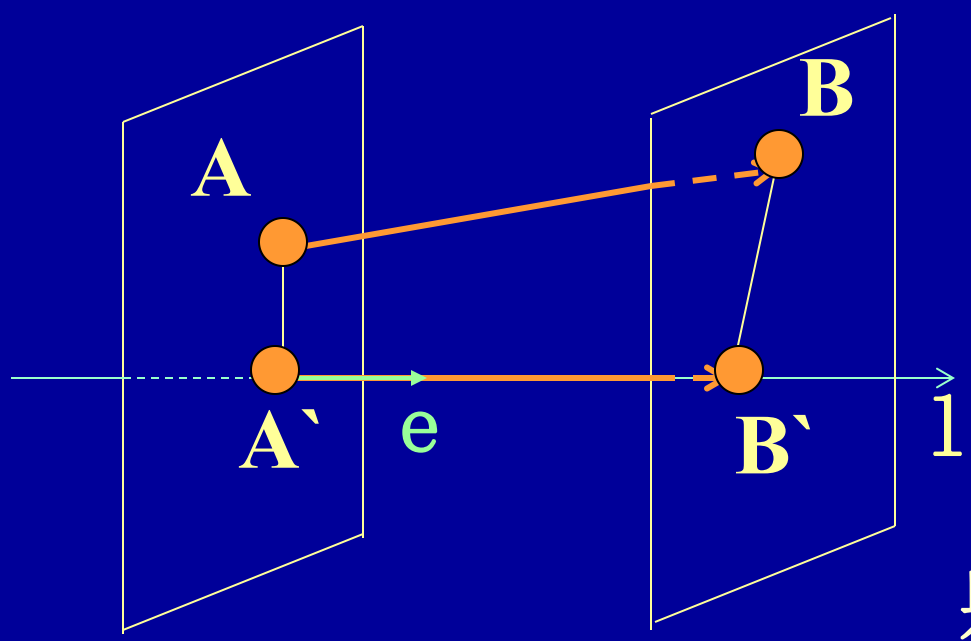
$$\vec{A'B'} = \text{射影向量 } \vec{{}_1AB}$$

### 3. 向量在轴上的射影

如果在轴上取与轴同向的单位向量 $e$ ,

则有 射影向量 $\vec{1}AB = \vec{A'B'} = x e$

$x$ 叫做向量 $\vec{AB}$ 在轴 $l$ 上的射影,记作射影 $\vec{1}AB$



即 射影 $\vec{1}AB = x$

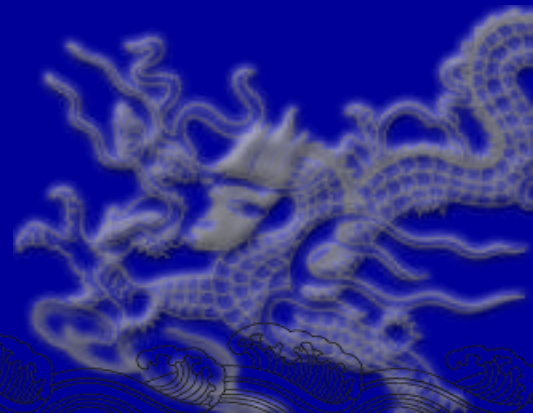
射影向量 $\vec{1}AB$ 与射影 $\vec{1}AB$

可分别记作

射影向量 $\vec{e}AB$ 与射影 $\vec{e}AB$

对射影矢量 $\vec{e}\overline{AB}$ 与射影 $\overrightarrow{e\overline{AB}}$  , 有

$$\text{射影矢量}_{\vec{e}\overline{AB}} = (\text{射影}_{\overrightarrow{e\overline{AB}}}) e$$

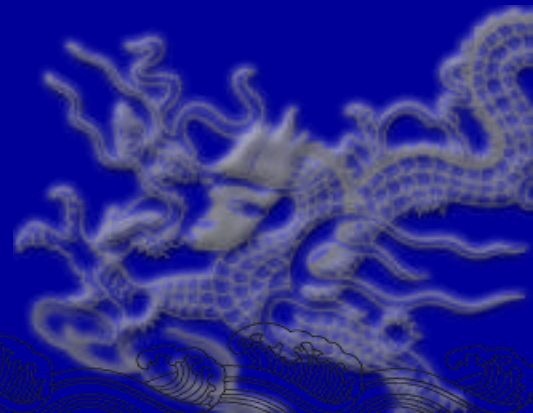
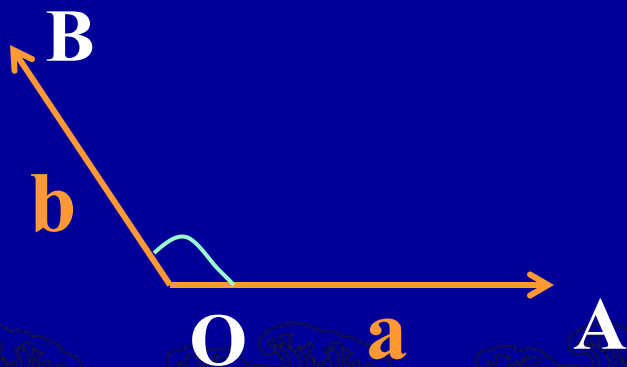


## 二、 两矢量的夹角

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是两个非零矢量,自空间任意一点 $O$ 作

$\vec{OA} = \mathbf{a}, \vec{OB} = \mathbf{b}$ ,射线 $OA$ 与 $OB$ 构成的角度在 $0$ 与 $\pi$

之间的角,称为矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角,记做 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .



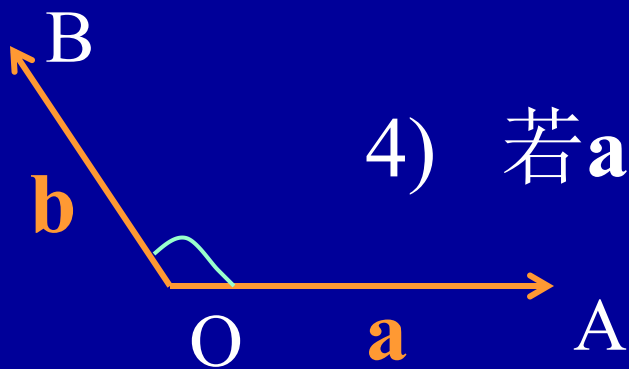
# 几点说明:

1)  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  与  $O$  点的选取无关.

2) 若  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  同向,  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ .

3) 若  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  反向,  $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi$ .

4) 若  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  不共线,  $0 < \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \pi$ .

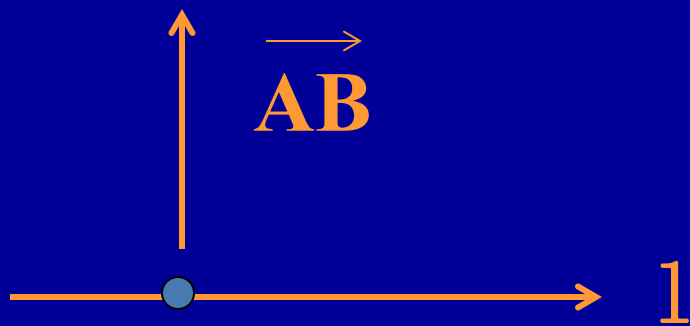


### 三、向量在轴上的射影公式

**定理** 向量 $\vec{AB}$ 在轴 $l$ 上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦:

$$\text{射影}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \theta, \quad \theta = \angle(l, \vec{AB})$$

**证明:** 1 若  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时射影 $_l \vec{AB} = 0$ , 命题显然成立.



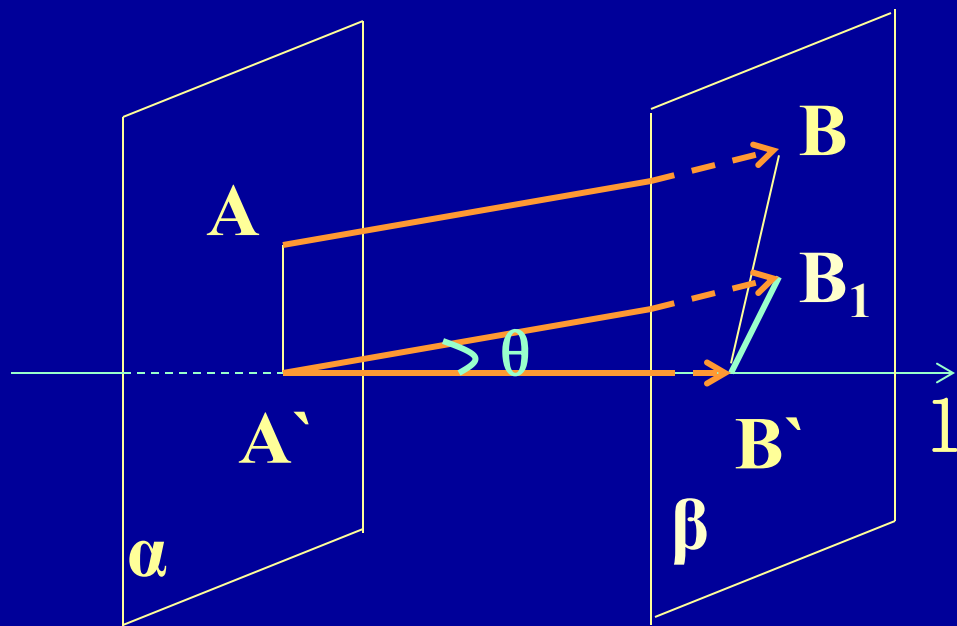
事实上: 射影 $_l \vec{AB} = 0$

$$|\vec{AB}| \cos \theta = 0.$$

2 当  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  时,

过A, B 分别作平面 $\alpha, \beta$ 与  $l$  垂直, 且各交  $l$

于A', B'. 再作向量 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$ , 于是 $B_1$ 在 $\beta$ 上.



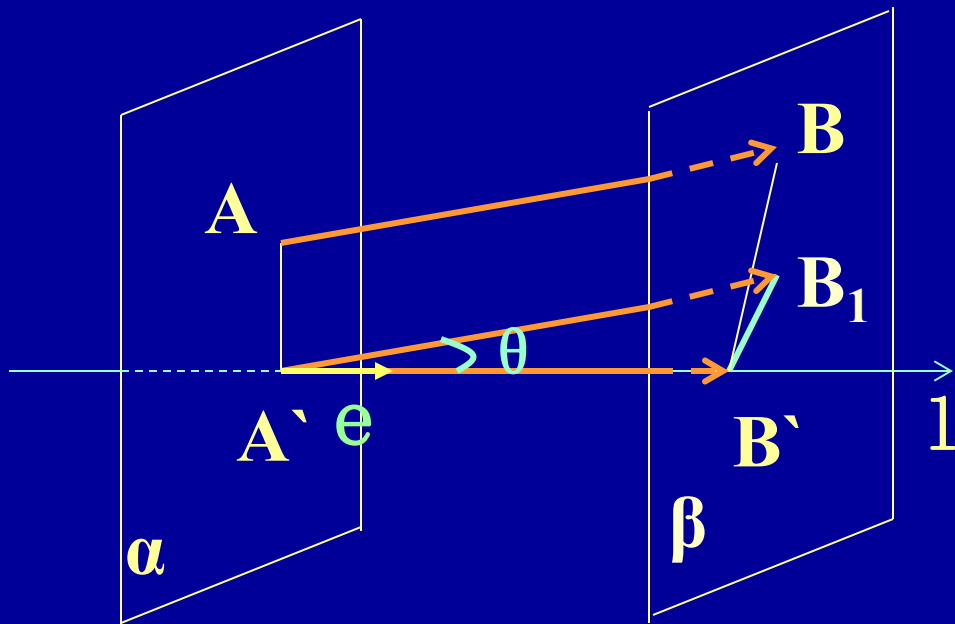
从而  $\angle A'B_1B' = \frac{\pi}{2}$

即  $\triangle A'B_1B'$  是直角 $\triangle$ .

设  $e$  为与轴1同向的单位矢量.

则有  $\overrightarrow{A'B'} = xe$  所以, 射影<sub>1</sub> $\overrightarrow{AB} = x$ .

1). 若  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  时,  $\overrightarrow{A'B'}$  与  $e$  同向,



$$\begin{aligned} x &= |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cos \theta \end{aligned}$$

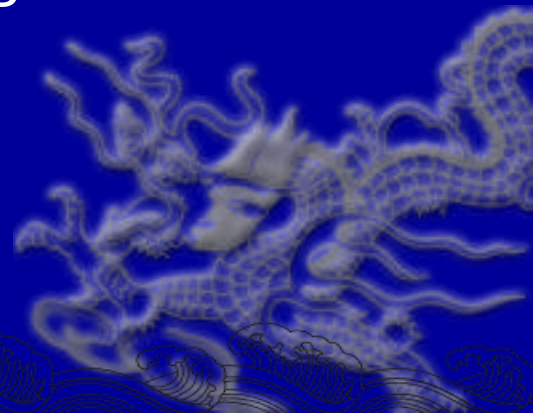
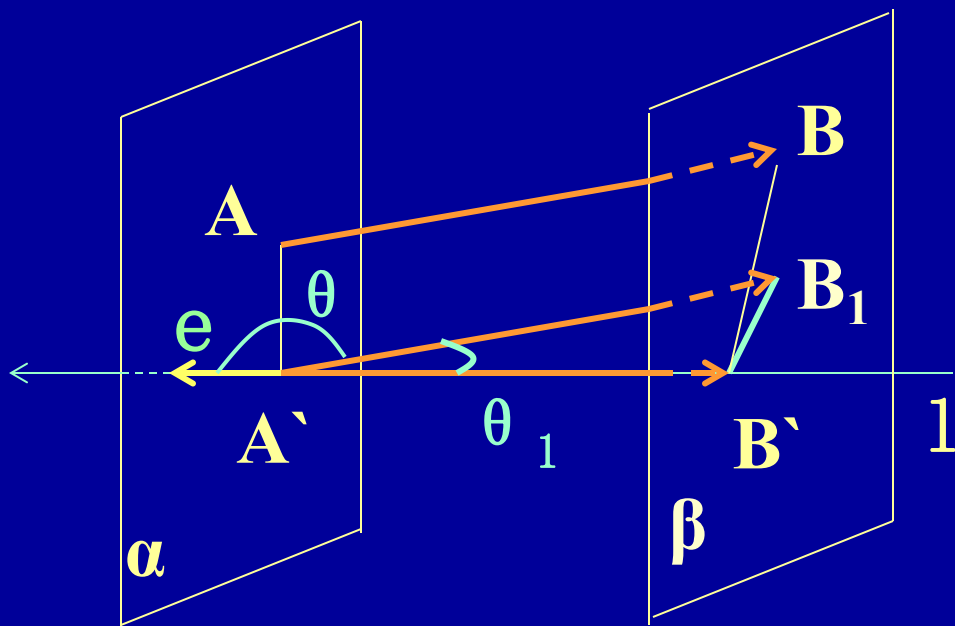
2). 若  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  时,

$\vec{A'B'}$  与  $e$  反向,  $\vec{A'B'} = xe$  射影<sub>1</sub> $\vec{AB} = x$ .

$$x = -|\vec{A'B'}|$$

$$= -|\vec{A'B_1}| \cos(\pi - \theta)$$

$$= |\vec{AB}| \cos \theta$$



归纳前面的证明,有

1. 若  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  时, 有  $x = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta$  ;

2. 若  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时 射影<sub>1</sub> $\overrightarrow{AB} = 0 = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta$  ;

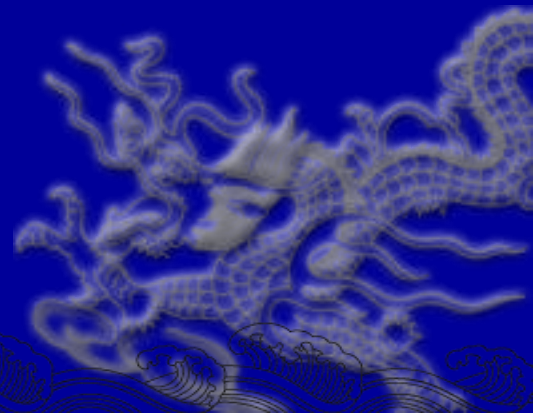
3. 若  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  时, 有  $x = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta$  ;

综上所述, 当  $0 \leq \theta \leq \pi$  时, 总有

射影<sub>1</sub> $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta$  . 定理得证.

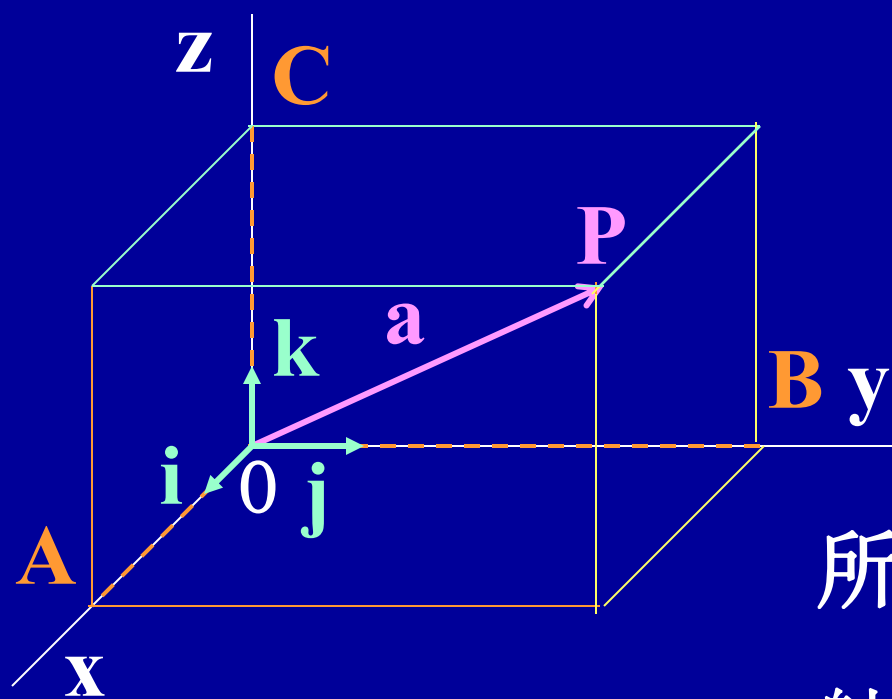
# 推论：

相等矢量在同一轴上的射影相等



例1 在直角坐标系下, 矢量 $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ . 证明:  
射影 $_{\mathbf{i}} \mathbf{a} = X$ , 射影 $_{\mathbf{j}} \mathbf{a} = Y$ , 射影 $_{\mathbf{k}} \mathbf{a} = Z$ .

证: 设 $\mathbf{a}$ 的径矢为 $\overrightarrow{OP}$ , P在三坐标轴上的



射影分别是A, B, C,

射影矢量 $_{\mathbf{i}} \mathbf{a} = X\mathbf{i}$ ,

射影矢量 $_{\mathbf{j}} \mathbf{a} = Y\mathbf{j}$

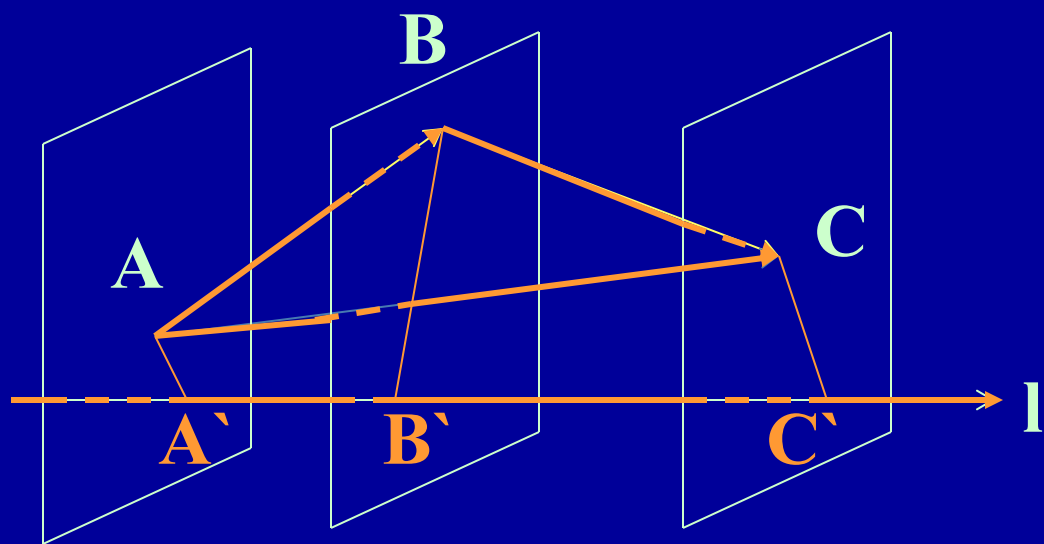
射影矢量 $_{\mathbf{k}} \mathbf{a} = Z\mathbf{k}$ .

所以 射影 $_{\mathbf{i}} \mathbf{a} = X$ , 射影 $_{\mathbf{j}} \mathbf{a} = Y$ ,  
射影 $_{\mathbf{k}} \mathbf{a} = Z$ . 命题得证.

### 三、向量在轴上的射影相关定理

定理1 对于任意向量 $a, b$ , 有

$$\text{射影}_l(a+b) = \text{射影}_l a + \text{射影}_l b$$



证： 设 $\vec{AB} = a$

$\vec{BC} = b$

则

$\vec{AC} = a + b$

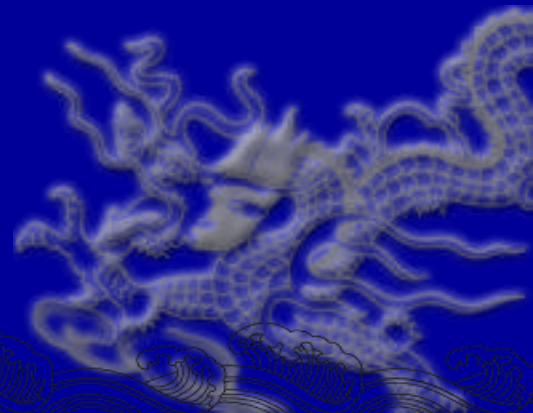
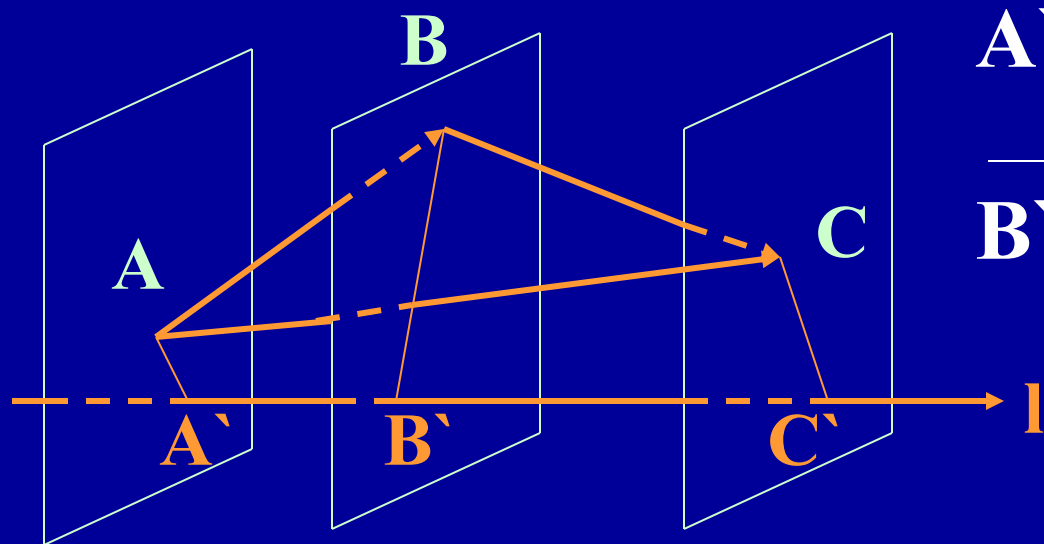
设 $A', B', C'$ 分别是 $A, B, C$ 在轴 $l$ 上的射影,

则有  $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$ , 因为

$\overrightarrow{A'C'} =$ 射影矢量 ${}_l \overrightarrow{AC}$ ,

$\overrightarrow{A'B'} =$ 射影矢量 ${}_l \overrightarrow{AB}$ ,

$\overrightarrow{B'C'} =$ 射影矢量 ${}_l \overrightarrow{BC}$ ,



所以,

射影向量 $\vec{AC}$  = 射影向量 $\vec{AB}$  + 射影向量 $\vec{BC}$ .

另一方面,由公式有

$$\text{射影向量}_l \vec{AC} = (\text{射影}_l \vec{AC}) e$$

$$\text{射影向量}_l \vec{AB} = (\text{射影}_l \vec{AB}) e$$

$$\text{射影向量}_l \vec{BC} = (\text{射影}_l \vec{BC}) e \quad \text{于是,}$$

$$(\text{射影}_l \vec{AC}) e = (\text{射影}_l \vec{AB}) e + (\text{射影}_l \vec{BC}) e$$

由分配律,有

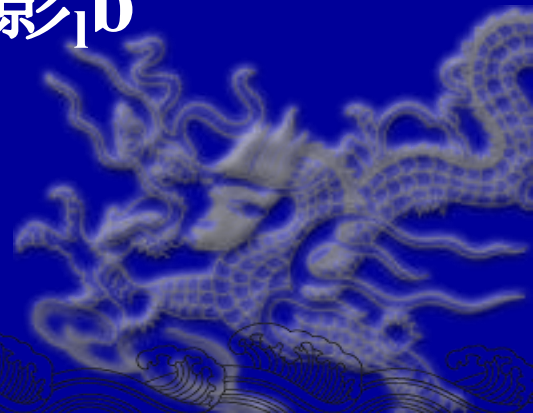
$$(\text{射影}_1 \overrightarrow{AC}) e = (\text{射影}_1 \overrightarrow{AB} + \text{射影}_1 \overrightarrow{BC}) e$$

又因为单位矢量 $e$ 与轴  $l$  同向,所以

$$\text{射影}_1 \overrightarrow{AC} = (\text{射影}_1 \overrightarrow{AB} + \text{射影}_1 \overrightarrow{BC})$$

$$\text{即} \quad \text{射影}_1(a+b) = \text{射影}_1 a + \text{射影}_1 b$$

定理得证.



定理2 对于任意矢量 $\mathbf{a}$ 及任意实数 $\lambda$ , 有

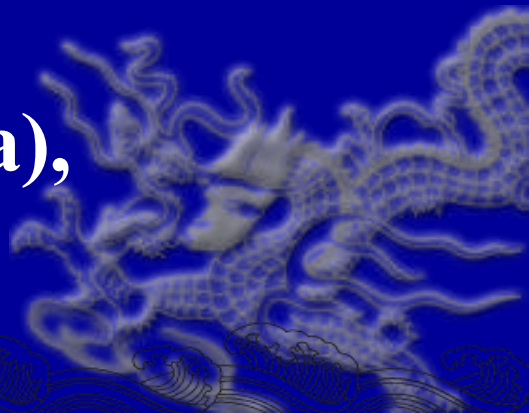
$$\text{射影}_l(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{射影}_l \mathbf{a}$$

分析:  $\text{射影}_l(\lambda \mathbf{a}) = |\lambda \mathbf{a}| \cos \angle(l, \lambda \mathbf{a}),$

$$\lambda \text{射影}_l \mathbf{a} = \lambda |\mathbf{a}| \cos \angle(l, \mathbf{a}),$$

问题转化为证明下面等式成立:

$$|\lambda \mathbf{a}| \cos \angle(l, \lambda \mathbf{a}) = \lambda |\mathbf{a}| \cos \angle(l, \mathbf{a}),$$



证：如果  $\lambda = 0$  或  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,

射影<sub>l</sub>( $\lambda \mathbf{a}$ ) =  $\lambda$  射影<sub>l</sub> $\mathbf{a} = 0$  等式成立.

如果  $\lambda \neq 0$  且  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,

1) 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda \mathbf{a}$  与  $\mathbf{a}$  同向, 故有

$$\angle(\mathbf{l}, \lambda \mathbf{a}) = \angle(\mathbf{l}, \mathbf{a})$$

所以  $|\lambda \mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{l}, \lambda \mathbf{a}) = \lambda |\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{l}, \mathbf{a})$

即 射影<sub>l</sub>( $\lambda \mathbf{a}$ ) =  $\lambda$  射影<sub>l</sub> $\mathbf{a}$  等式成立.

2)当  $\lambda < 0$ 时,  $\lambda \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 反向, 故有

$$\angle(\mathbf{l}, \lambda \mathbf{a}) = \pi - \angle(\mathbf{l}, \mathbf{a})$$

所以  $|\lambda \mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{l}, \lambda \mathbf{a})$

$$= |\lambda| |\mathbf{a}| \cos(\pi - \angle(\mathbf{l}, \mathbf{a}))$$

$$= (-\lambda) |\mathbf{a}| (-\cos \angle(\mathbf{l}, \mathbf{a}))$$

$$= \lambda |\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{l}, \mathbf{a})$$

亦即 射影<sub>1</sub>( $\lambda \mathbf{a}$ ) =  $\lambda$  射影<sub>1</sub> $\mathbf{a}$ , 等式成立.

**综上所述, 定理得证**

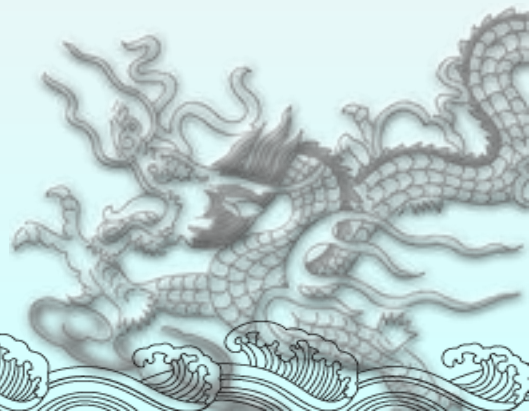
例 2 设  $\vec{m} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$ ,  $\vec{n} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$ ,  
 $\vec{p} = 5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ , 求矢量  $\vec{a} = 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$  在  $x$  轴  
上的射影及在  $y$  轴上的射影矢量.

解  $\because \vec{a} = 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$

$$= 4(3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}) + 3(2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k})$$
$$- (5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) = 13\vec{i} + 7\vec{j} + 15\vec{k},$$

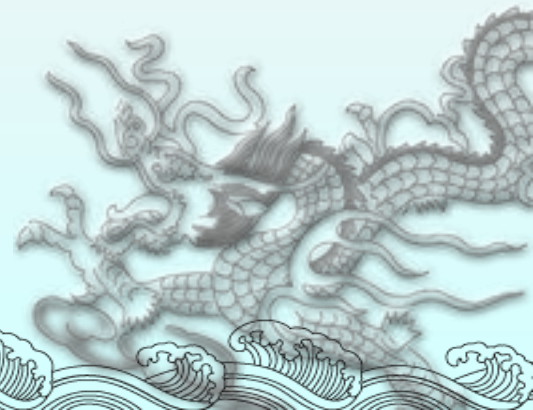
$\therefore$  在  $x$  轴上的射影为  $a_x = 13$ ,

在  $y$  轴上的射影矢量为  $7\vec{j}$ .



## 五、课堂小结

1. 向量在轴上的射影及射影向量概念；
2. 向量在轴上的射影及射影向量的计算。



# 思考题：

向量在轴上的射影与两向量的数量积之间有什么关系？

