第九章 欧几里得空间

返回

第一节　定义与基本性质

主要内容

- 内积
- 长度
- 夹角
- 度量矩阵
- 举例

一、内积　1. 定义

定义 1　设 V 是实数域 R 上一线性空间，

在V 上定义了一个二元实函数，称为**内积**，

记作(α,β)，它具有以下性质：

1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；　　2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$；

3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；

4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$.

这里 α,β,γ 是 V 中任意的向量，k 是任意实数，

这样的线性空间 V 称为**欧几里得空间**.

2. 欧几里得空间举例

例 1　在线性空间 R^n 中，对于向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n),$$

定义内积

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n. \tag{1}$$

R^n能否成为一个欧几里得空间?

以后仍用 R^n 来表示这个欧几里得空间.

在 $n=3$ 时，(1) 式就是几何空间中向量的内积在直角坐标系中的坐标表达式.

例 2 在闭区间 $[a, b]$ 上的所有实连续函数所成的空间 $C(a, b)$ 中，对于函数 $f(x), g(x)$ 定义内积

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

对于内积 (2)，$C(a, b)$ 能否构成一欧几里得空间?

同样地，线性空间 $\mathrm{R}[x], \mathrm{R}[x]_n$ 对于内积 (2) 也构成欧几得里空间.

3. 欧几里得空间的性质

定义中条件1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ 表明 内积是对称的.

因此，与2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;

3) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;

相当地就有

$$2')\ (\alpha, k\beta) = (k\beta, \alpha) = k(\beta, \alpha) = k(\alpha, \beta);$$

$$3')\ (\alpha, \beta + \gamma) = (\beta + \gamma, \alpha) = (\beta, \alpha) + (\gamma, \alpha)$$

$$= (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma).$$

由条件4）有$(\alpha,\alpha)\geq 0$．所以对于任意的向量α，$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$是有意义的．在几何空间中，向量α的长度为$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$．类似地，我们在一般的欧几里得空间中引进向量长度的概念．

由条件4) 有 $(\alpha,\alpha)\geq 0$. 所以对于任意的向量 α, $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 是有意义的. 在几何空间中, 向量 α 的长度 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.

类似地, 在一般的欧几里得空间中引进向量长度的概念.

二、长度 1. 定义

定义 2 非负实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 称为向量 α 的**长度**, 记为 $|\alpha|$.

显然, 向量的长度一般是正数, 只有零向量的长度才是零, 这样定义的长度有以下的性质:

2. 性质

性质 1 设 $k \in \mathrm{R}, \alpha \in V$，则有

$$|k\alpha| = |k|\,|\alpha|. \qquad (3)$$

证明

$$|k\alpha| = \sqrt{(k\alpha, k\alpha)}$$

$$= \sqrt{k^2(\alpha, \alpha)}$$

$$= |k|\,|\alpha|.$$

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

性质 2 柯西-布涅柯夫斯基不等式

设 α,β 是任意两个向量，则 $|(\alpha,\beta)|\le|\alpha||\beta|$， (4)

当且仅当 α,β 线性相关时，等号才成立.

证明 当 $\beta=0$ 时，(4) 式显然成立. 以下设 $\beta\neq 0$. 令 t 是一个实变数，作向量

$$\gamma=\alpha+t\beta.$$

由内积的定义的 4) $(\alpha,\alpha)\ge 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$. 可知，不论 t 取何值，一定有

$$(\gamma,\gamma)=(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)\geq 0.$$

即

$$(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)t^2\geq 0. \tag{5}$$

取

$$t=-\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}.$$

代入(5)式，得

$$(\alpha,\alpha)-\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)}\geq 0,$$

即 $(\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$.

两边开方便得

$$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta|.$$

当 α,β 线性相关时，等号显然成立. 反过来，如果等号成立，由以上证明过程可以看出，或者 $\beta=0$ 或者

$$\alpha-\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta=0,$$

也就是说 α,β 线性相关.

证毕

3. 两个著名的不等式

对于例1题中的欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$，

按照（1）定义的内积代入（4）得

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|$$

$$\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\,.$$

对于例2题中的欧几里得空间 $C(a,b)$，

按照（2）定义的内积代入（4）得

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leq\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. 单位向量

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 如果 $\alpha \neq 0$,

则由 $|k\alpha| = |k||\alpha|$ 知, 向量

$$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$$

是一个单位向量. 用向量 α 的长度去除向量 α,

得到一个与 α 成比例的单位向量, 通常称为把 α **单位化**.

三、夹角

1. 夹角的定义

定义 3 非零向量 α,β 的夹角 $<\alpha,\beta>$ 规定为

$$<\alpha,\beta>=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|},0\le<\alpha,\beta>\le\pi.$$

2. 三角不等式

根据柯西-布涅柯夫斯基不等式，有三角形不等式

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|. \tag{6}$$

因为 $$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$$

$$= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta)$$

$$\le |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$$

$$= (|\alpha| + |\beta|)^2.$$

所以 $$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|.$$

3. 正交

定义 4 如果向量 α,β 的内积为零，即

$$(\alpha,\beta)=0,$$

那么 α,β 称为**正交**或**互相垂直**，记为 $\alpha\perp\beta$.

显然，这里正交的定义与解析几何中对于正交的说法是一致的. 两个非零向量正交的充分必要条件是它们的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

由定义立即看出，**只有零向量才与自己正交.**

在欧几里得空间中同样有勾股定理，即当α,β正交时，

$$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$

这是因为
$$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)$$
$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$

可以把勾股定理推广到多个向量的情形，即如果

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 两两正交，那么

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\ldots+|\alpha_m|^2.$$

在以上的讨论中,对空间的维数没有作任何限制.

从现在开始，假定空间是有限维的.

四、度量矩阵

设 V 是一个 n 维欧几里得空间，在 V 中取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，对于 V 中任意两个向量

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \ldots + y_n\varepsilon_n,$$

由内积的性质得

$$(\alpha, \beta) = (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n,\ y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \ldots + y_n\varepsilon_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)x_i y_j .$$

令

$$a_{ij} = (\varepsilon_i , \varepsilon_j) \quad (i , j = 1 , 2 , \ldots, n) , \qquad (7)$$

显然

$$a_{ij} = a_{ji} .$$

于是

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j . \qquad (8)$$

利用矩阵，(α , β) 还可以写成

$$(\alpha,\beta) = X^{\mathrm{T}}AY, \tag{9}$$

其中

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

分别是 α,β 的坐标，而矩阵

$$A=(a_{ij})_{nn}$$

称为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 的**度量矩阵**.

上面的讨论表明，在知道了一组基的度量矩阵之后，任意两个向量的内积就可以通过坐标按 (8) 或 (9) 来计算，因而度量矩阵完全确定内积.

设 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是空间 V 的另外一组基，而由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 C, 即

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) C .$$

设向量 α, β 在基 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的坐标分别为 X, Y

$$X = CX, Y = CY$$

于是不难算出，基 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的度量矩阵

$$B = (b_{ij}) = (\eta_i, \eta_j) = C^{\mathrm{T}}AC. \qquad (10)$$

这就是说，**不同基的度量矩阵是合同的.**

根据条件 4) 对非零向量 α，即

$$X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

有
$$(\alpha, \alpha) = X^{\mathrm{T}}AX > 0.$$

因此，**度量矩阵是正定的.**

反之，给定一个 n 级正定矩阵 A 及 n 维实线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. 可以规定内积，使它成为欧几里得空间，并且基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵为 A.

欧几里得空间的子空间在所定义的内积之下显然也是一个欧几里得空间.

欧几里得空间以下简称为**欧氏空间**.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

五、举例

例 1 在欧氏空间 R^n 中计算下列向量的内积，并求它们之间的夹角.

(1) $\alpha=(1,1,1,1)$，$\beta=(-1,2,4,3)$；

(2) $\alpha=(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{3},\frac{1}{6})$，$\beta=(3,-1,2,2)$；

(3) $\alpha=(3,-1,1,-1)$，$\beta=(-2,2,-2,2)$；

(4) $\alpha=(-1,1,-1,2,1)$，$\beta=(3,1,-1,0,1)$.

单击这里开始

例 2　在 4 维欧氏空间中，设基

$$\alpha_1=(1,1,-1,-1),\ \alpha_2=(1,1,1,0),$$

$$\alpha_3=(-1,1,1,1),\ \alpha_4=(1,0,0,-1)$$

的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求基

$$\varepsilon_1=(1,0,0,0),\ \varepsilon_2=(0,1,0,0),$$

$$\varepsilon_3=(0,0,1,0),\ \varepsilon_4=(0,0,0,1)$$

的度量矩阵；

(2) 求向量

$$\beta_1=(1,-1,1,-1),\ \beta_2=(0,1,1,0)$$

的内积.

(1) 解　　(2) 解