

《高等代数（2）》课程大纲

一、课程简介

《高等代数(2)》是数学与应用数学的专业必修课程,是数学专业考研究生入学考试的必考课程之一,也是理论性和应用性很强的一门数学基础课。其主要内容包括二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间等。讲授本课程的任务主要在于培养学生培养抽象的逻辑思维能力与推理论证能力;进一步掌握代数中的论证方法,熟练的运算能力与技巧,提高分析问题、解决问题的能力,为进一步学习其它后继课程打下坚实的基础。

二、教学对象

四年制数学与应用数学专业学生

三、教学目的

通过本课程的教学,使学生对高等代数乃至代数学的思想和方法有较深刻的认识,提高他们的抽象思维、逻辑推理和运算的能力;使学生初步掌握基本的、系统的代数知识和抽象的、严格的代数方法,进而加深对中学代数的理解;使学生能应用代数思想和方法去理解与处理有关的问题,培养与提高代数的理论分析问题与解决问题的能力;为学生今后学习近世代数、离散数学、数值计算、泛函分析等后续课程提供所需的基础理论知识;使学生在智能开发、创新能力培养等方面获得重要的平台。

四、教学要求

在整个教学过程中,加强基本运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力以及解决实际问题的能力的培养。通过本课程的教学,应使学生较系统地掌握高等代数的基础理论和基本方法,提高逻辑思维和推理论证能力,并具备较熟练的计算能力和分析问题的能力,为学习后继课程打下基础。主要以讲授为主、学生参与习题演练为辅等教学方式授课,期末以卷考试方式进行考核,总学时 72 学时。

五、教学要求的基础内容及学时要求

学时分配

章节 序号	主要内容	学时 安排	各教学环节学时分配						备注
			讲授	实验	讨论	习题	课外	其它	
五	二次型	16	12			4			

章节 序号	主要内容	学时 安排	各教学环节学时分配						备注
			讲授	实验	讨论	习题	课外	其它	
六	线性空间	20	16			4			
七	线性变换	20	14		2	4			
八	欧几里得空间	16	12			4			
合计		72	54		2	16			

各章教学要求和教学内容

第五章 二次型

教学要求

1. 正确理解二次形和非退化线性替换的概念；掌握二次型的矩阵表示及二次型与对称矩阵的一一对应关系；掌握矩阵的合同概念及性质；
2. 理解二次型为标准形，掌握化二次型为标准形的方法（主要是配方法、初等变换法）；
3. 正确理解复数域和实数域上二次型的规范形的唯一性；掌握惯性定理；
4. 正确理解正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵等概念；熟练掌握正定二次型及半正定二次型的等价条件。

教学内容

非退化线性替换、二次型的矩阵、二次型与其矩阵的一一对应关系、矩阵的合同、化二次型为标准形、复数域和实数域上二次型的规范形的唯一性、惯性定理、正定二次型的判别条件、半正定二次型的等价条件。

第六章 线性空间

教学要求

1. 掌握映射、单射、满射、一一映射、逆映射等概念；
2. 正确理解和掌握线性空间的定义及性质；会判断一个代数系统是否是线性空间；
3. 理解线性组合、线性表示、线性相关、线性无关等概念；正确理解和掌握 n 维线性空间的概念及性质；
4. 正确理解和掌握基变换与坐标变换的关系；
5. 正确理解线性子空间的定义及判别定理；掌握向量组生成子空间的定义及等价条件；

6. 掌握子空间的交与和的定义及性质；熟练掌握维数公式；
7. 深刻理解子空间的直和的概念及和为直和的充要条件；
8. 理解和掌握线性空间同构的定义、性质及两个有限维空间同构的充要条件。

教学内容

判断一个代数系统是否是线性空间、 n 维线性空间的概念及性质、基变换与坐标变换的关系、向量组生成子空间的定义及等价条件、子空间的交与和、维数公式、子空间的直和、线性空间同构的定义、性质。

第七章 线性变换

教学要求

1. 理解和掌握线性变换的定义及性质；
2. 掌握线性变换的运算及运算规律，理解线性变换的多项式；
3. 深刻理解和掌握线性变换与矩阵的联系；掌握矩阵相似的概念和线性变换在不同基下的矩阵相似等性质；
4. 理解和掌握矩阵的特征值、特征向量、特征多项式的概念和性质；会求一个矩阵的特征值和特征向量；掌握相似矩阵与它们的特征多项式的关系及哈密尔顿-凯莱定理；
5. 掌握 n 维线性空间中一个线性变换在某一组基下的矩阵为对角形的充要条件；
6. 掌握线性变换的值域、核、秩、零度等概念；深刻理解和掌握线性变换的值域与它对应的矩阵的秩的关系及线性变换的秩和零度间的关系；
7. 掌握不变子空间的定义；会判定一个子空间是否是不变子空间；深刻理解不变子空间与线性变换矩阵化简之间的关系；掌握将空间 V 按特征值分解成不变子空间的直和表达式；
8. 掌握标准形的定义。

教学内容

线性变换的定义及性质、线性变换的运算、线性变换与矩阵的联系、矩阵相似、线性变换在不同基下的矩阵、矩阵的特征值、特征向量、特征多项式、求矩阵的特征值和特征向量、相似矩阵与它们的特征多项式的关系、哈密尔顿-凯莱定理、线性变换在某一组基下的矩阵为对角型的充要条件、线性变换的值域、核、秩、零度、线性变换的值域与它对应的矩阵的秩的关系及线性变换的秩和零度间的关系、不变子空间的定义、判定一个子空

间是否是不变子空间、不变子空间与线性变换矩阵化简之间的关系、将空间 V 按特征值分解成不变子空间的直和表达式、标准形的定义。

第八章 欧几里得空间

教学要求

1. 深刻理解欧氏空间的定义及性质；掌握向量的长度，两个向量的夹角、正交及度量矩阵等概念和基本性质，使学生掌握各种概念之间的联系和区别；

2. 正确理解正交向量组、标准正交基的概念，掌握施密特正交化过程，并能把一组线性无关的向量化为单位正交的向量；

3. 深刻理解两个欧氏空间同构的定义。掌握两个欧氏空间同构的意义及同构与空间维数之间的关系；

4. 正确理解和掌握正交变换的概念及几个等价关系，让学生掌握正交变换与向量的长度，标准正交基，正交矩阵间的关系；

5. 正确理解和掌握两个子空间正交的概念，掌握正交与直和的关系，及欧氏空间中的每一个子空间都有唯一的正交补的性质；

6. 深刻理解并掌握任一个对称矩阵均可正交相似于一个对角阵，并掌握求正交矩阵的方法。能用正交变换化实二次型为标准形。

教学内容

欧氏空间的定义及性质向量的长度，两个向量的夹角、正交及度量矩阵等概念和基本性质、正交向量组、标准正交基的概念、施密特正交化、欧氏空间同构的意义及同构与空间维数之间的关系、正交变换的概念及几个等价关系、正交变换与向量的长度，标准正交基，正交矩阵间的关系、两个子空间正交的概念、正交与直和的关系、正交阵、用正交变换化实二次型为标准形。

六、课程的其它教学环节

习题课：保证每两周 1 个学时的习题课，根据学生作业情况有针对性的讲解习题。

讨论课：从每章知识点中选择适当的内容，供学生讨论并讲解，重点章节 2 学时。

七、考核方式和考核要求

1. 考核方式：考试

2. 考核要求：

第五章 二次型 (约占 25%)

考核内容

二次型的矩阵表示, 标准形, 唯一性, 正定二次型。

考核要求

1. 掌握二次型的概念及二次型与对称矩阵的一一对应关系;
2. 掌握矩阵的合同概念及其性质;
3. 了解二次型的标准形, 掌握化二次型为标准形的方法;
4. 理解复数域和实数域上二次型的标准形的唯一性;
5. 掌握正定二次型的概念和判别法。

第六章 线性空间 (约占 25%)

考核内容

线性空间的定义与简单性质、维数、基与坐标、基变换与坐标变换、性子空间、子空间的直和、线性空间的同构。

考核要求

1. 掌握向量空间的概念及其简单的性质;
2. 理解和掌握向量空间的子空间的概念和判别方法, 子空间的交与和的概念;
3. 理解和掌握向量空间中向量组的线性相关性的概念和性质;
4. 掌握有限维向量空间的基与维数的概念及其求法;
5. 掌握向量空间中向量坐标的概念及其意义, 基变换及坐标变换公式, 过渡矩阵的概念及其性质;
6. 理解向量空间同构的概念和性质, 掌握有限维向量空间同构的充要条件。

第七章 线性变换 (约占 25%)

考核内容

线性变换的定义与运算、线性变换的矩阵、特征值与特征向量, 可对角化的矩阵、线性变换的值域与核、不变子空间、若当标准型、最小多项式。

考核要求

1. 理解线性变换的概念, 掌握它的运算及其简单性质;
2. 掌握线性变换的矩阵表示法;

3. 理解矩阵的相似、特征根、特征向量等基本概念，掌握特征根、特征向量的求法和矩阵对角化的条件及其化法；

4. 掌握标准形的定义；

5. 了解最小多项式的概念，掌握一个矩阵相似于一个对角阵与它的最小多项式的关系。

第八章 欧几里得空间（约占 25%）

考核内容

欧几里得空间定义及基本性质、标准正交基、同构、正交变换、子空间、实对称矩阵的标准型。

考核要求

1. 理解内积、欧氏空间、向量的长度、两个向量的夹角、距离、正交及度量矩阵等概念和基本性质；

2. 掌握正交向量组、标准正交基的概念及求法，掌握施密特正交化过程，并能把一组线性无关的向量化为单位正交的向量；

3. 理解欧氏空间同构的概念及欧氏空间同构的充要条件；

4. 理解和掌握正交变换的概念及几个等价关系，掌握正交变换与向量的长度，标准正交基，正交矩阵间的关系；

5. 理解和掌握两个子空间正交的概念，掌握正交与直和的关系，及欧氏空间中的每一个子空间都有唯一的正交补的性质；

6. 理解和掌握任一个对称矩阵均可正交相似于一个对角阵，并掌握求正交矩阵的方法；能用正交变换化实二次型为标准形。

八、推荐教材、学习参考资料

1. 推荐教材

北京大学数学系几何与代数教研室代数小组《高等代数》 高等教育出版社 2013 年第四版

2. 学习参考资料

①张禾瑞、郝炳新《高等代数》 高等教育出版社 2007 年第五版

②杨子胥《高等代数》 高等教育出版社 1988 年第一版

③田孝贵《高等代数》 高等教育出版社 1997年第一版

④徐德余《高等代数》 四川大学出版社 2005年第二版