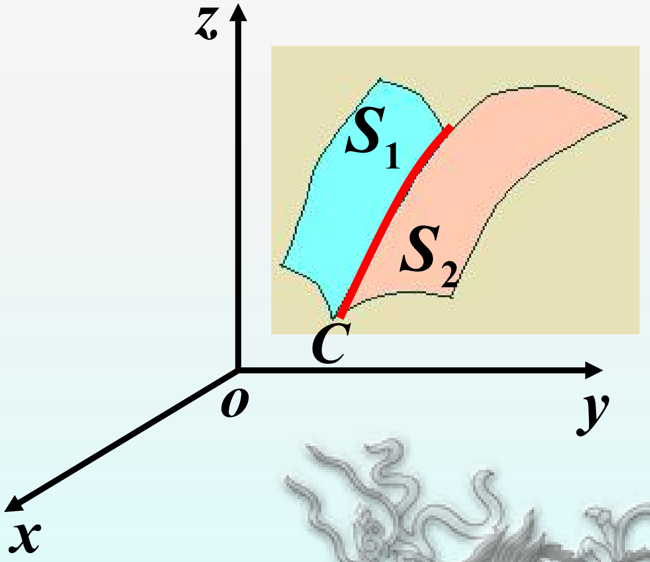
2.3空间曲线的方程

一、空间曲线的一般方程

空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

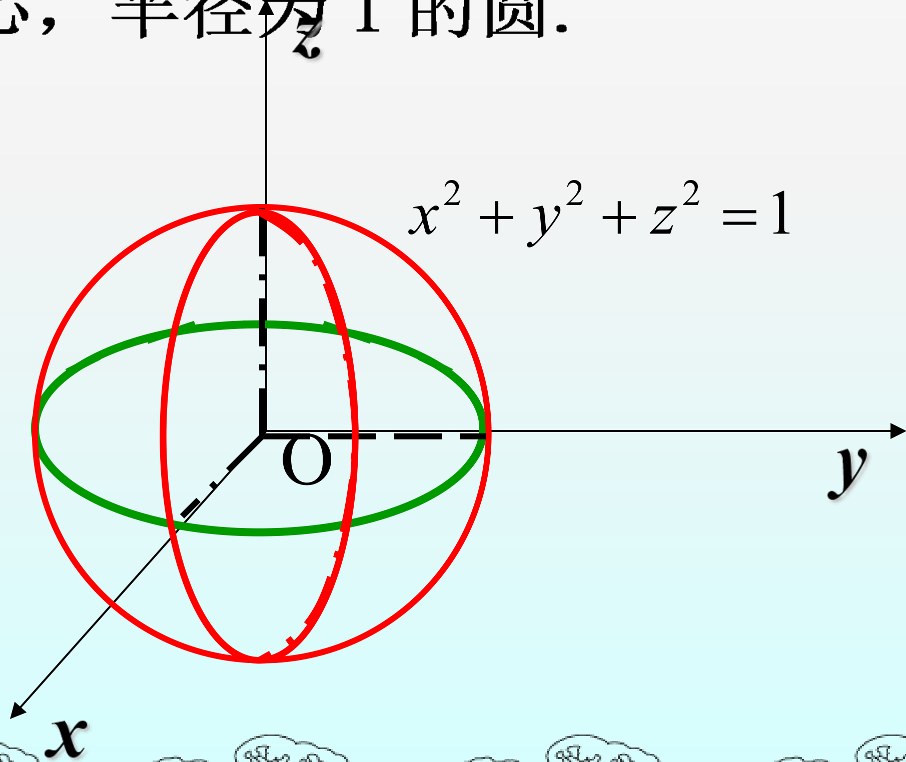
$$C\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

特点： 曲线上的点同时在这两个曲面上，它的坐标就都满足方程组；反之，满足此方程组的任何一组解所决定的点，一定在这两曲面的交线上。



例1 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 表示以原点为球心，半径为 1 的球面，$z=0$ 是 xOy 平面，其交线是 xOy 面上的以原点为圆心，半径为 1 的圆.

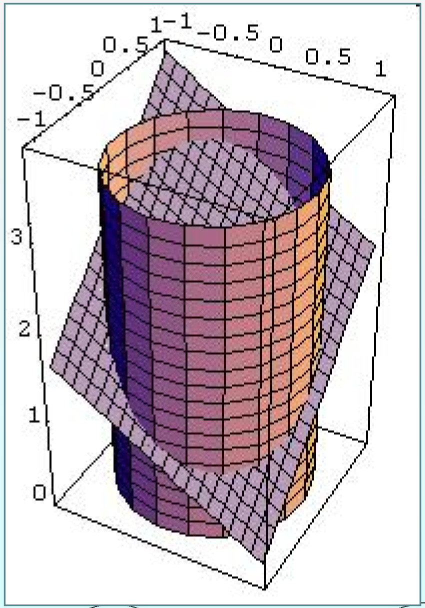


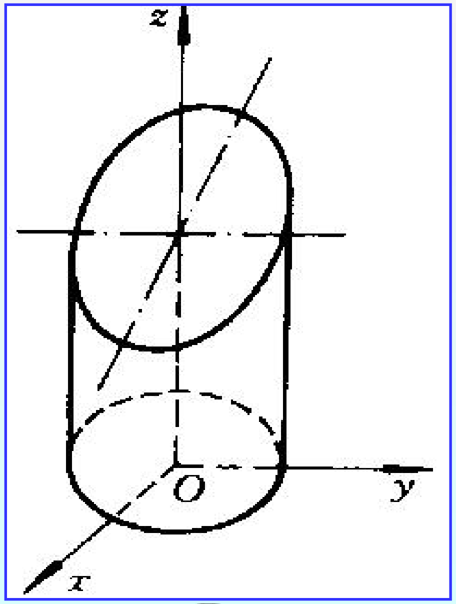
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

例2 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解 $x^2+y^2=1$ 表示圆柱面，$2x+3z=6$ 表示平面，

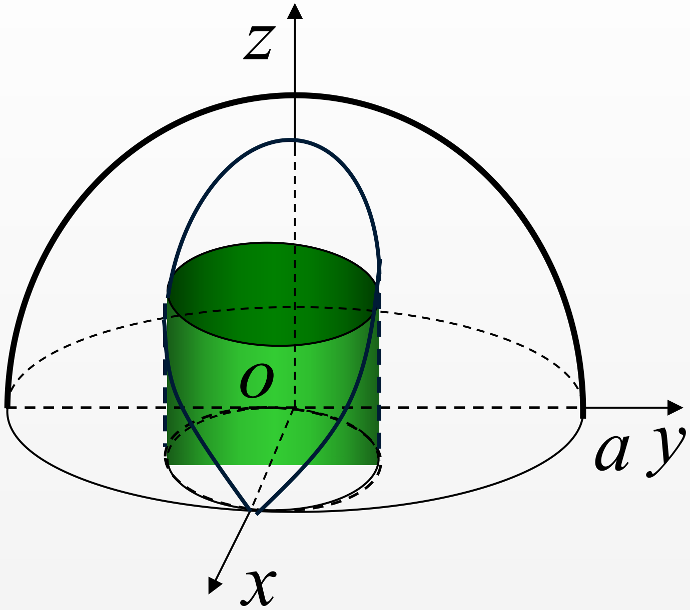
$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 交线为椭圆.





例3 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$

表示怎样的曲线?



解

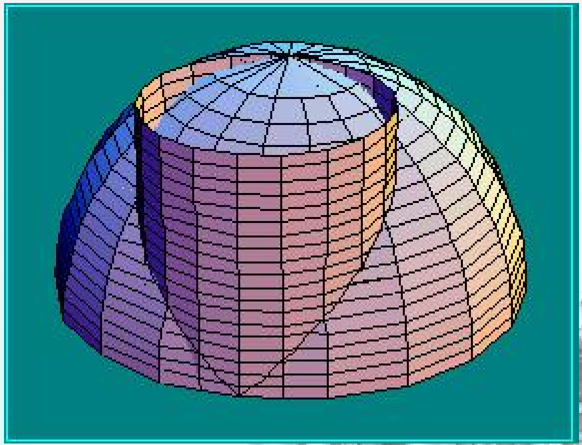
表示上半球面

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

与圆柱面

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

的交线



二、空间曲线的向量式参数方程

设向量函数

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad (1)$$

或

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e_1}+y(t)\vec{e_2}+z(t)\vec{e_3} \qquad (2)$$

当 t 在区间 $a \le t \le b$ 内变动时，$\vec{r}(t)$ 的终点 $M(x(t),y(t),z(t))$ 全部都在空间曲线 L 上；

反过来，空间曲线 L 上的任意点的向径都可由 t 的某个值通过（1）或（2）来表示，

那么（1）或（2）就叫做空间曲线 L 的**向量式参数方程**，其中 $t(a \le t \le b)$ 为参数.

例4 将下列曲线化为参数方程

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$

解: (1) 引入参数t，

所求为 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

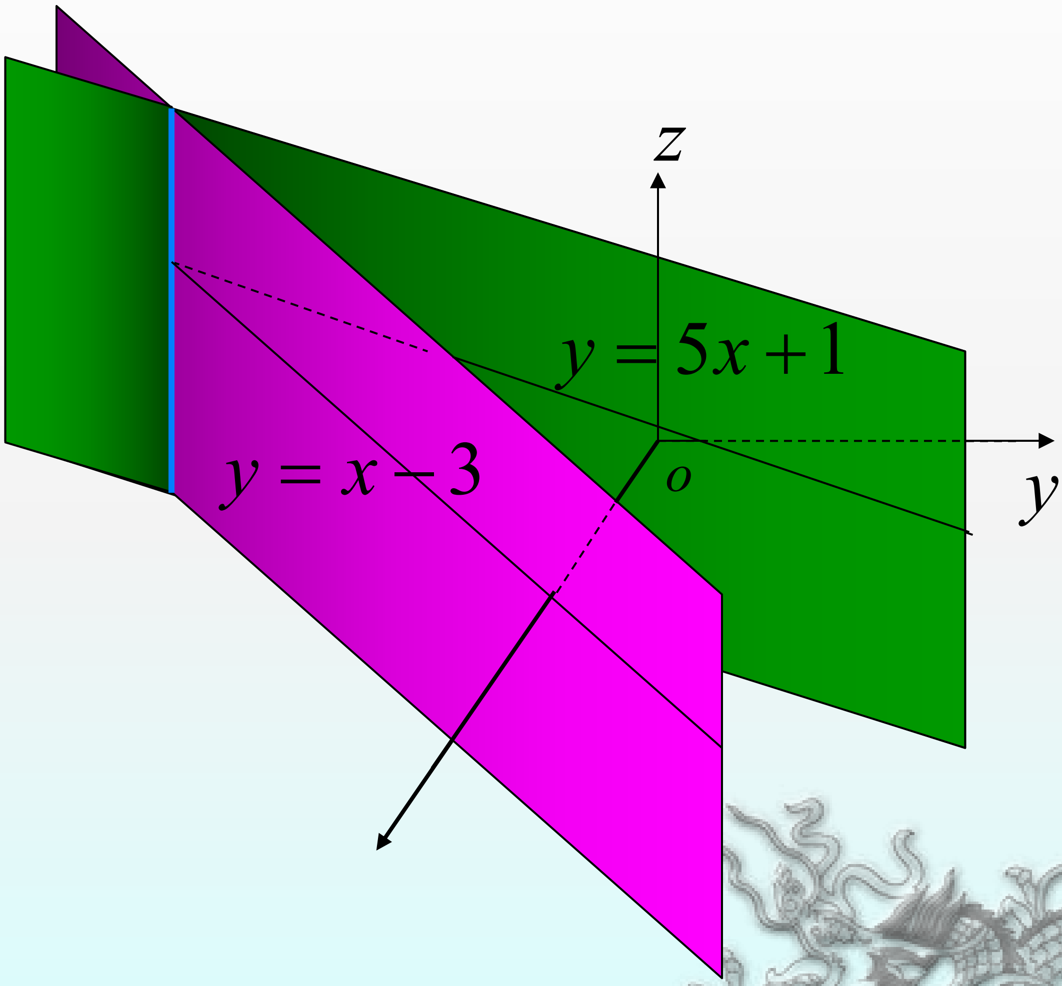
(2) 将第二方程变形为 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$,

所求为 $\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

例5 方程组

$$\begin{cases} y = 5x+1 \\ y = x-3 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?



三、空间曲线的坐标式参数方程

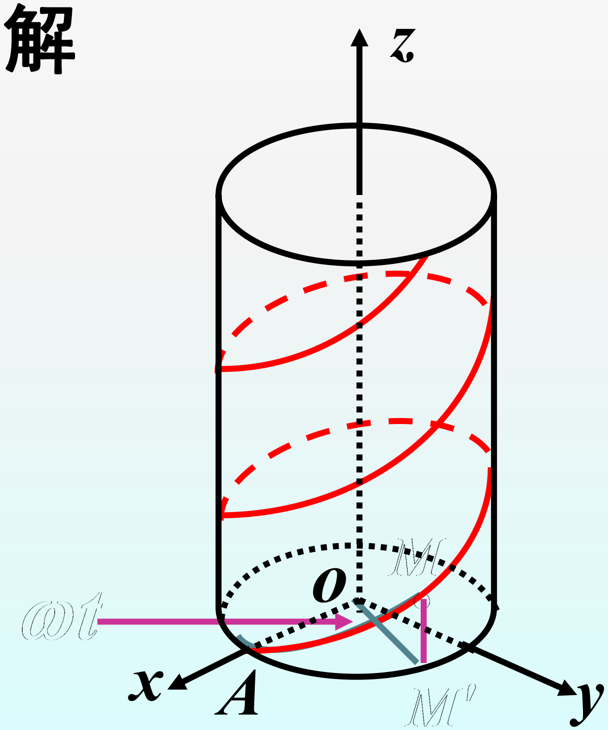
空间曲线上点的向径$\vec{r}(t)$的坐标为$\{x(t),y(t),z(t)\}$，所以空间曲线的参数方程常写成

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), (a \le t \le b) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (3)$$

表达式（3）叫做空间曲线的坐标式参数方程，其中t为参数.

例 6 如果空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升（其中ω、v都是常数），那么点M构成的图形叫做螺旋线．试建立其参数方程．

解



取时间t为参数，动点从A点出发，经过t时间，运动到M点

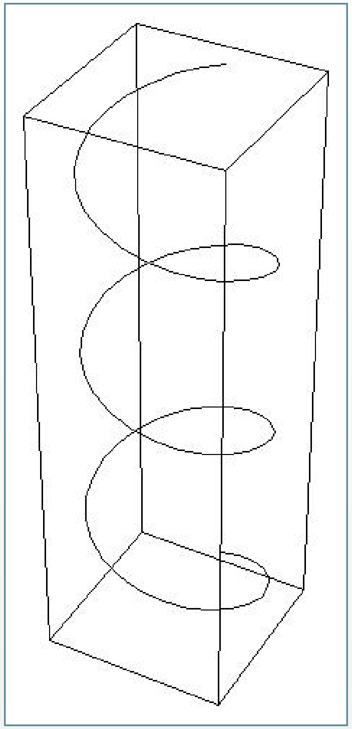
M在xoy面的投影$M'(x,y,0)$

$$\boxed{\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}}$$

螺旋线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \quad (\theta = \omega t, \quad b = \frac{v}{\omega})$$



螺旋线的重要**性质**:

上升的高度与转过的角度成正比.

即 $\theta: \quad \theta_0 \to \theta_0 + \alpha, \qquad z: \quad b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha,$

$\alpha = 2\pi,$ 上升的高度 $\boxed{h = 2b\pi}$ **螺距**

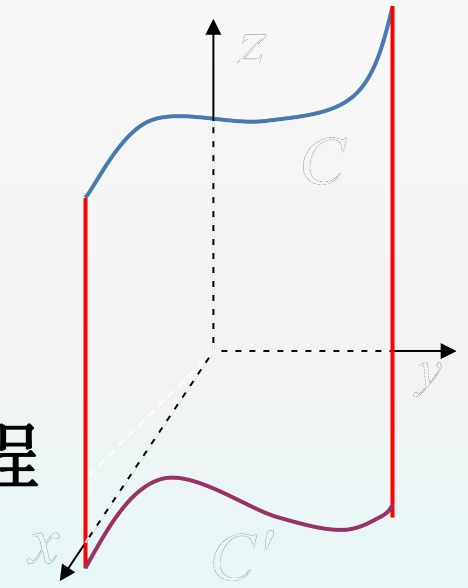
四、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 **C** 的一般方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 z 得投影柱面$H(x,y)=0$,

则C 在xoy 面上的投影曲线 C' 为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



消去 x 得C 在yoz 面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

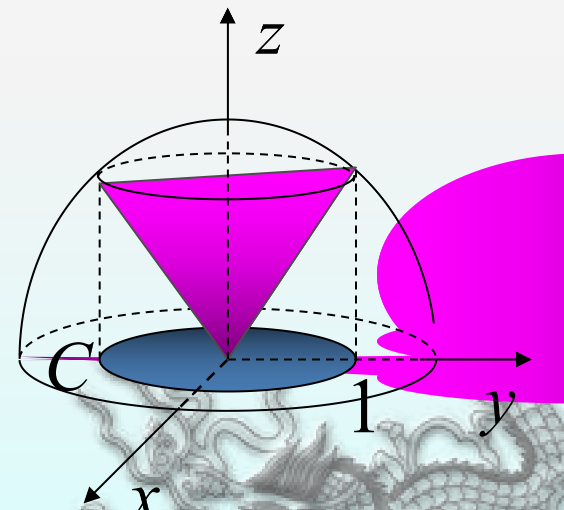
消去y 得C 在zox 面上的投影曲线方程

例7 试确定上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围的立体在 xoy 面上的投影曲线。

解 二曲面的交线

$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$$

在 xoy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$



所围圆域：$x^2+y^2\le 1,\ z=0.$

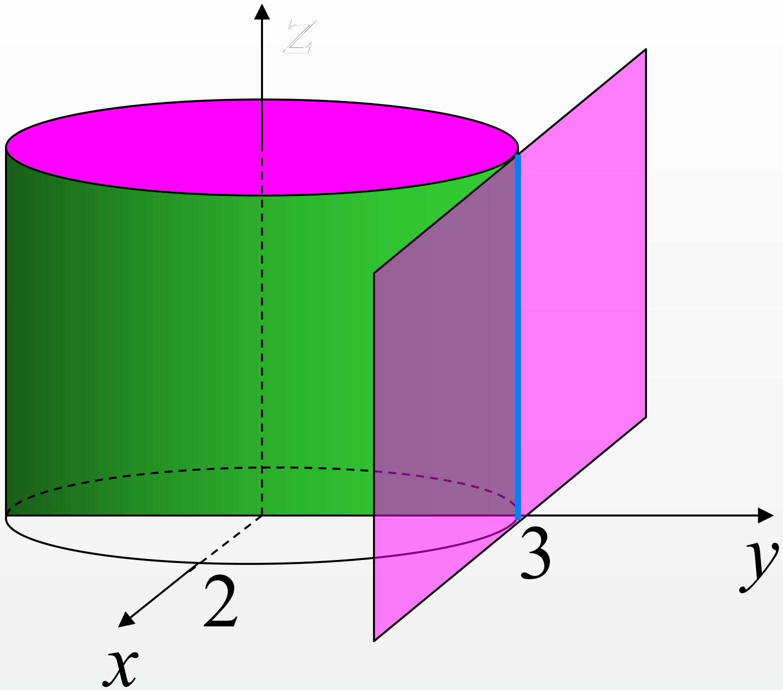
五、课堂小结

1. 对空间曲线的描述。

2. 空间曲线的一般方程和参数方程，以及两者之间的互化。

思考题:

交线c: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$



思考: 对平面 $y=b$

当 $|b|<3$ 时, 交线情况如何?

当 $|b|>3$ 时, 交线情况如何?