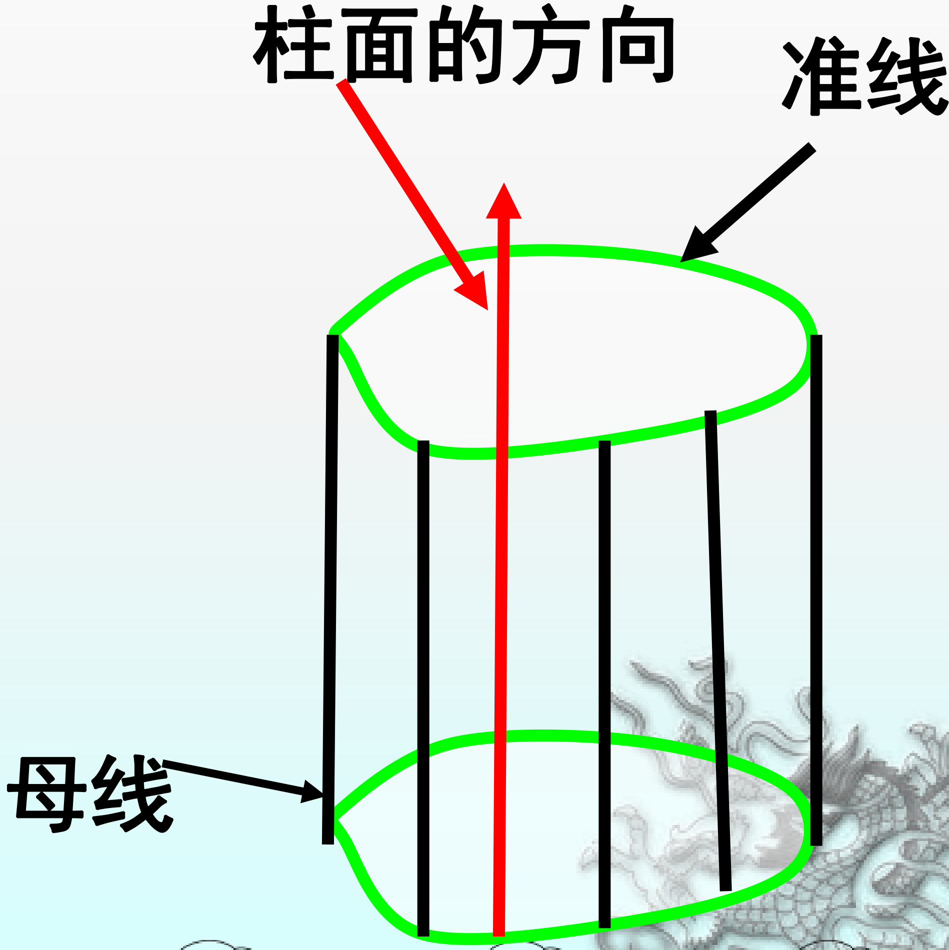
4.1柱面

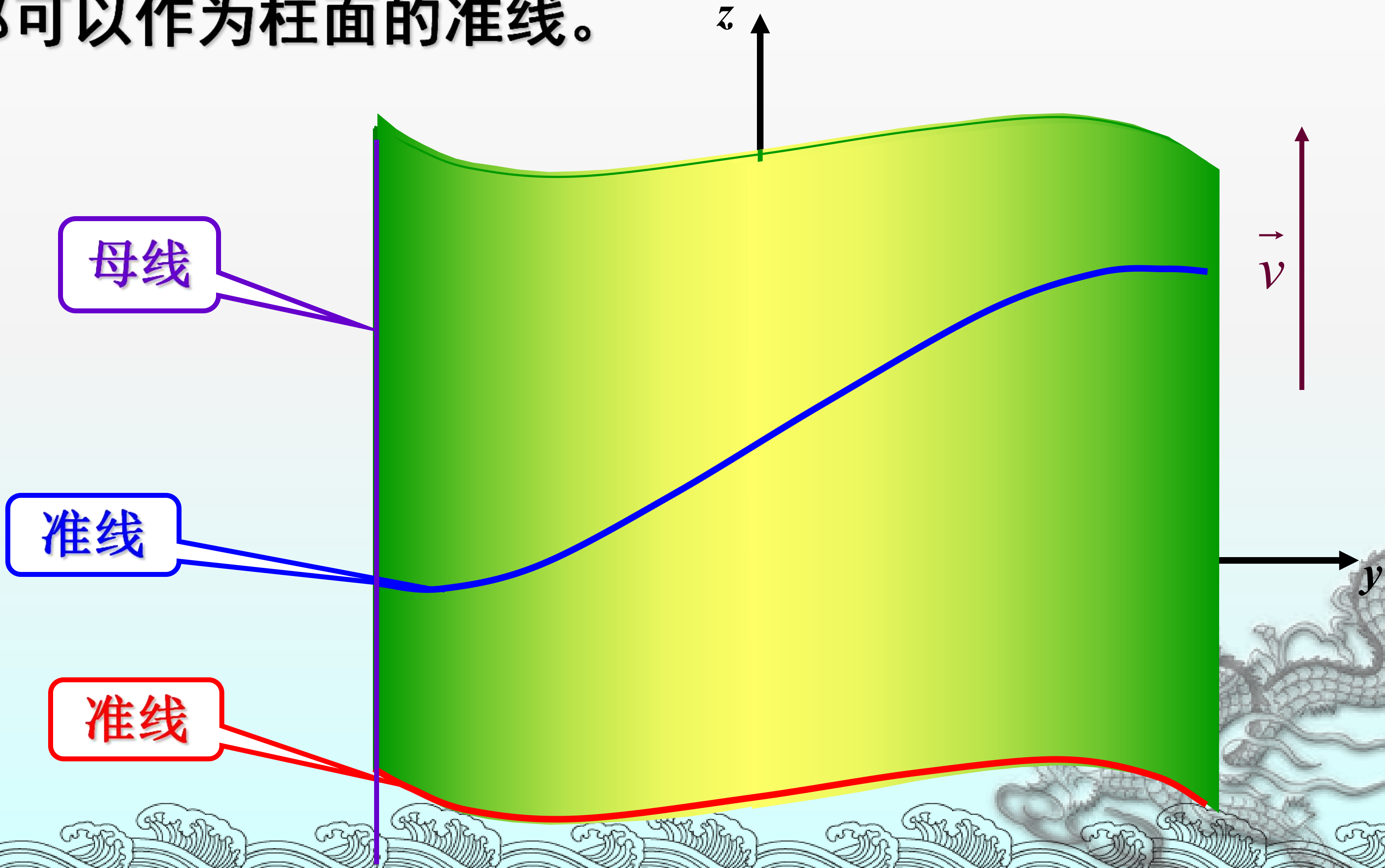
主讲人：邹 敏

一、柱面的概念

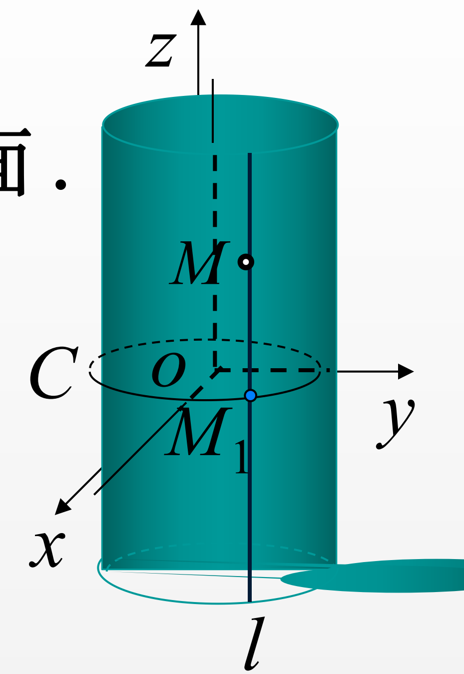
1. 定义：在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫柱面。



2. 说明：除平面外，柱面的方向是惟一的，而其准线是不惟一的，即每一条与柱面的母线都相交的曲线都可以作为柱面的准线。



3. 特殊柱面



引例：分析方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面 .

解: 在 xoy 面上，$x^2+y^2=R^2$ 表示圆C,

在圆C上任取一点 $M_1(x,y,0)$，过此点作

平行 z 轴的直线 l ,对任意点 $M(x,y,z)$

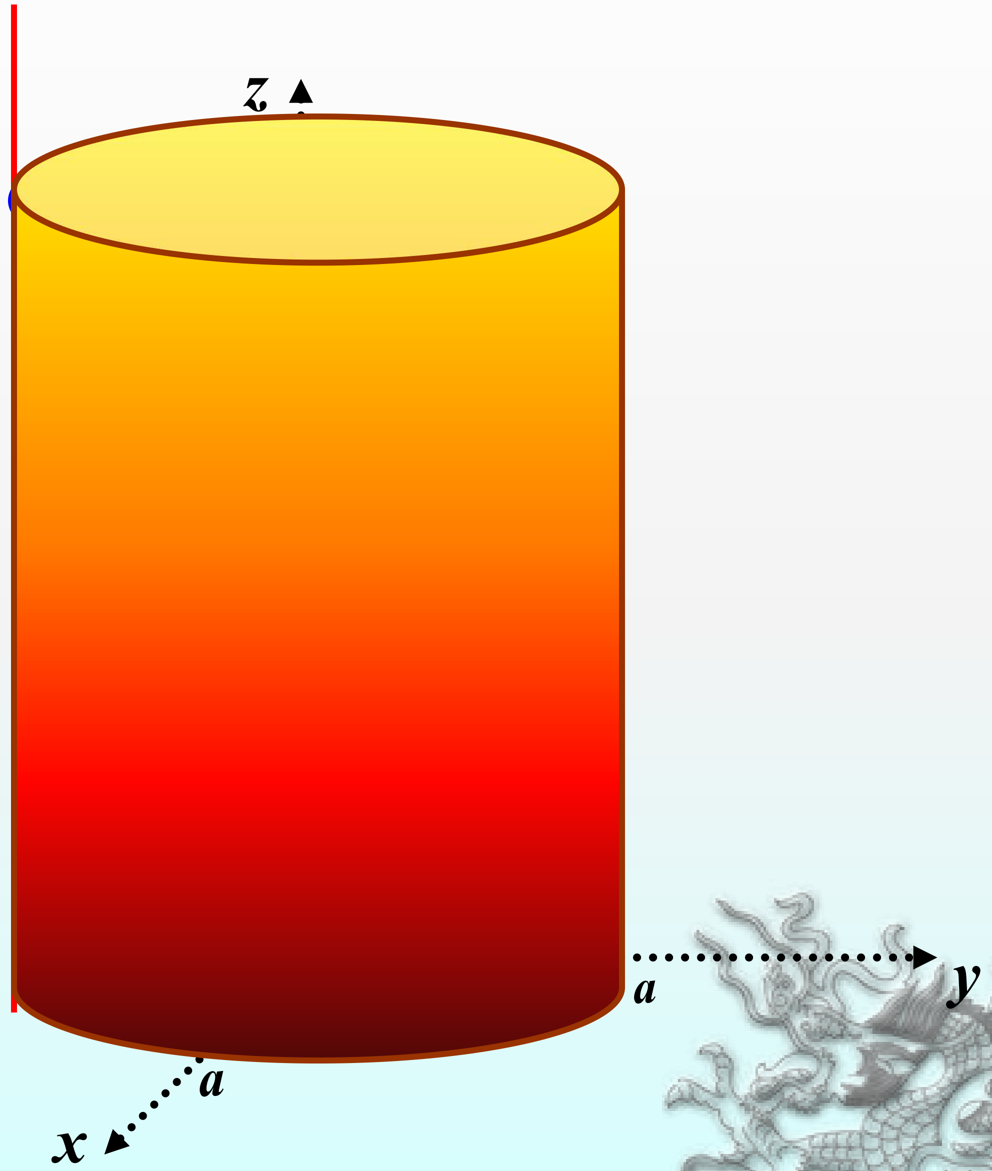
的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

沿曲线C平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为圆柱面。其上所有点的坐标都满足此方程。

故在空间 $x^2+y^2=R^2$ 表示圆柱面

圆柱面

$$x^2+y^2=a^2$$

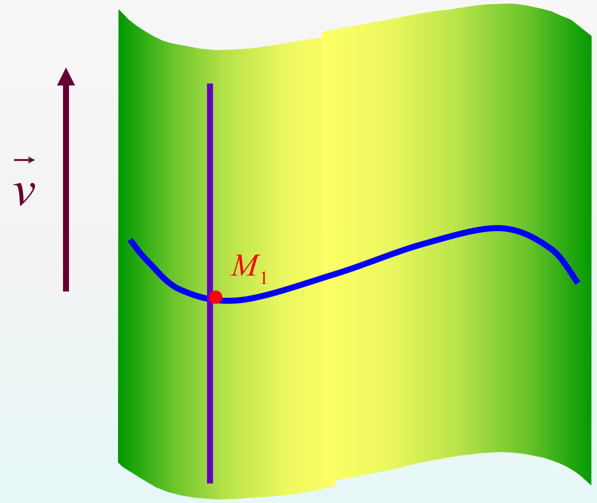


二、柱面的方程

1 柱面的一般方程

Ⅰ 准线方程 $C:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$　　Ⅱ 母线l的方向数：X,Y,Z

分析： $\forall\ M_1(x_1,y_1,z_1)\in S \Leftrightarrow \begin{cases}M_1\in C\\M_1\in l\end{cases}$



$$\Leftrightarrow\begin{cases}F_1(x_1,y_1,z_1)=0\\F_2(x_1,y_1,z_1)=0\\\dfrac{x-x_1}{X}=\dfrac{y-y_1}{Y}=\dfrac{z-z_1}{Z}\end{cases}=t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F_1(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0\\F_2(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0\end{cases}\Rightarrow F(x,y,z)=0$$

二、柱面的方程

例1 柱面的准线方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$，而母线的方向数是 $-1,0,1$，求这柱面的方程.

分析： $\forall\ M_1(x_1,y_1,z_1)\in S \ \Leftrightarrow \begin{cases} M_1\in C \\ M_1\in l \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0 \\ \dfrac{x-x_1}{X}=\dfrac{y-y_1}{Y}=\dfrac{z-z_1}{Z}=t \end{cases}$$

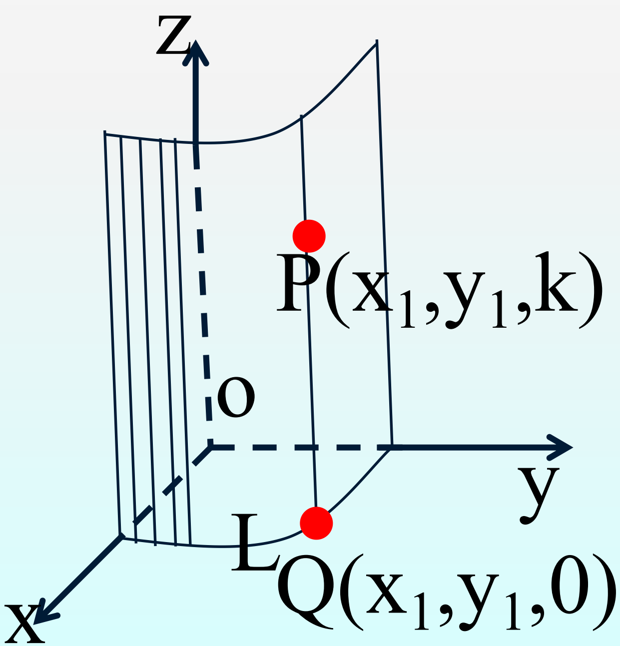
$$\Rightarrow F(x,y,z)=0$$

三、柱面的判定定理

在空间直角坐标系中，只含有两个元（坐标）的三元方程所表示的曲面是一个柱面，它的母线平行于所缺元（坐标）的同名坐标轴。

证明： 假设动点P(x, y, z)的坐标间的关系是不含变量z的方程 $F(x,y)=0$

在xoy平面上，它表示一条曲线L，L上的点Q的坐标满足这方程，即点Q的坐标为$Q(x_1, y_1, 0)$，且$F(x_1, y_1)=0$



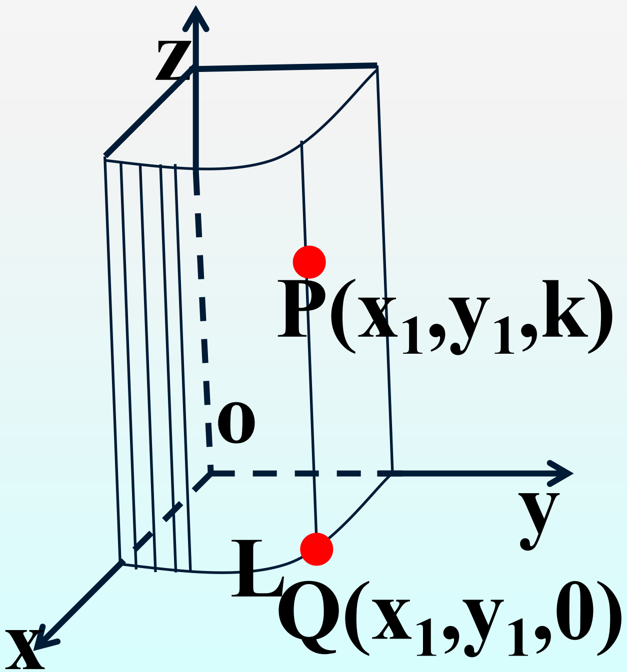
设通过点Q且与xoy平面垂直的直线上任意一点P的坐标为（x_1, y_1, k）其中k为任意实数，则P点的坐标也满足：$F(x_1, y_1)=0$

反之，满足方程$F(x,y)=0$的点（x_1,y_1,k）（k为任意常数）

在平行于z轴且通过曲线L上的点$Q(x_1,y_1,0)$的直线上，

即方程$F(x,y)=0$决定的曲面是以曲线L：$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

为准线，母线的方向数为0：0：1的柱面。



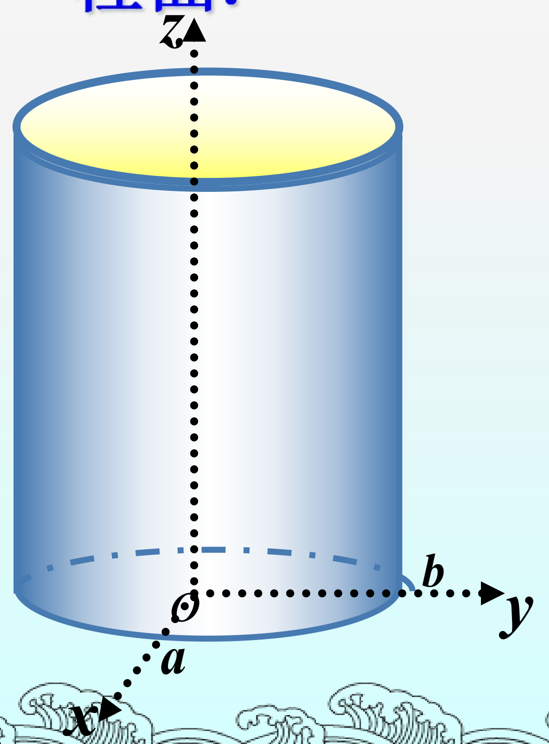
同理，$F(y,z)=0$,$F(x,z)=0$都表示

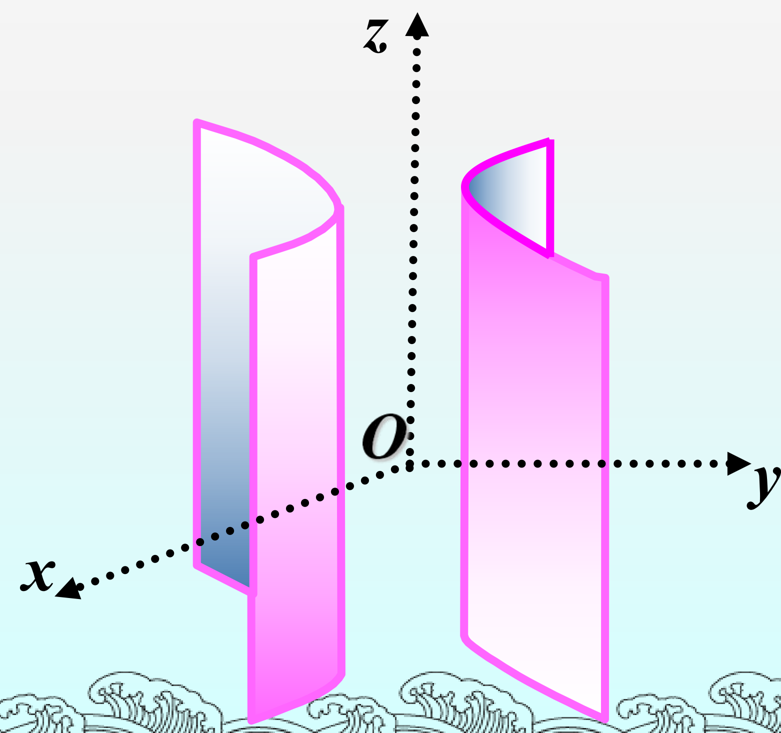
柱面，它们的母线分别平行于x

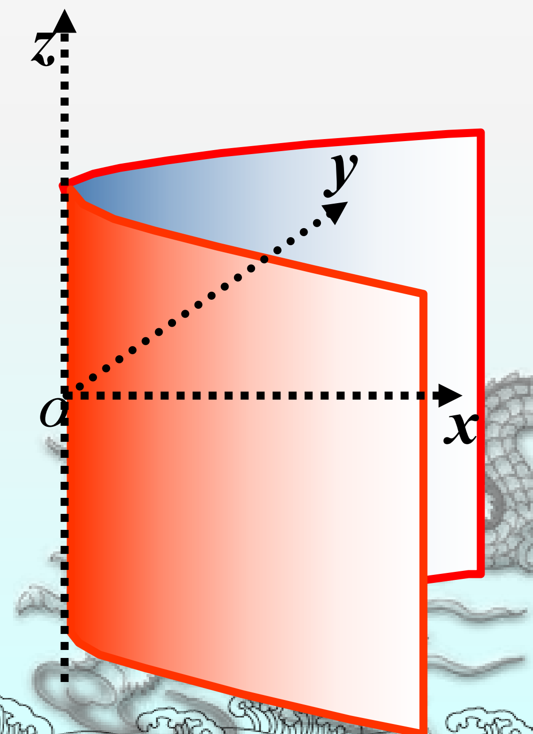
轴和y轴。

三、柱面的判定定理

在空间直角坐标系里，因这些柱面与 xOy 坐标面的交线分别是椭圆，双曲线与抛物线，所以它们依次叫做**椭圆柱面，双曲柱面，抛物柱面**，统称为**二次柱面.**







只含x, y而缺 z的方程$F(x, y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z轴的柱面，其准线为xoy面上曲线 $C: F(x, y)=0$.

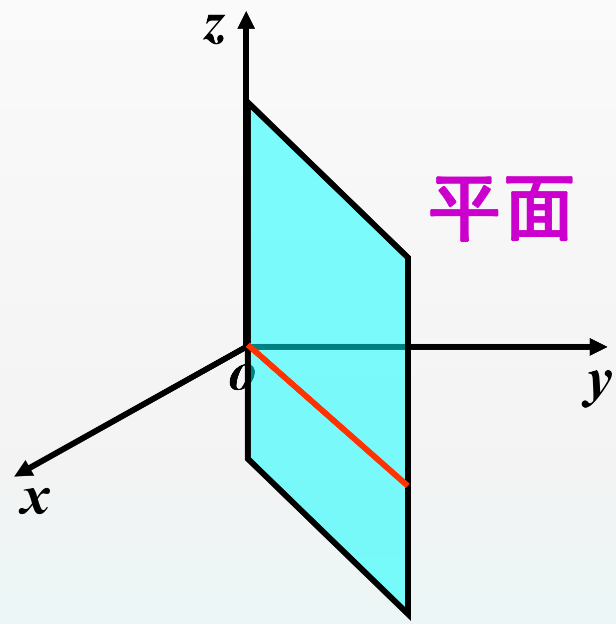
依次类推从柱面方程看**柱面的特征**：

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 椭圆柱面， 母线//x轴

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ 双曲柱面， 母线// z轴

$$x^2=2pz$$ 抛物柱面， 母线// y轴

四、特殊柱面：平面



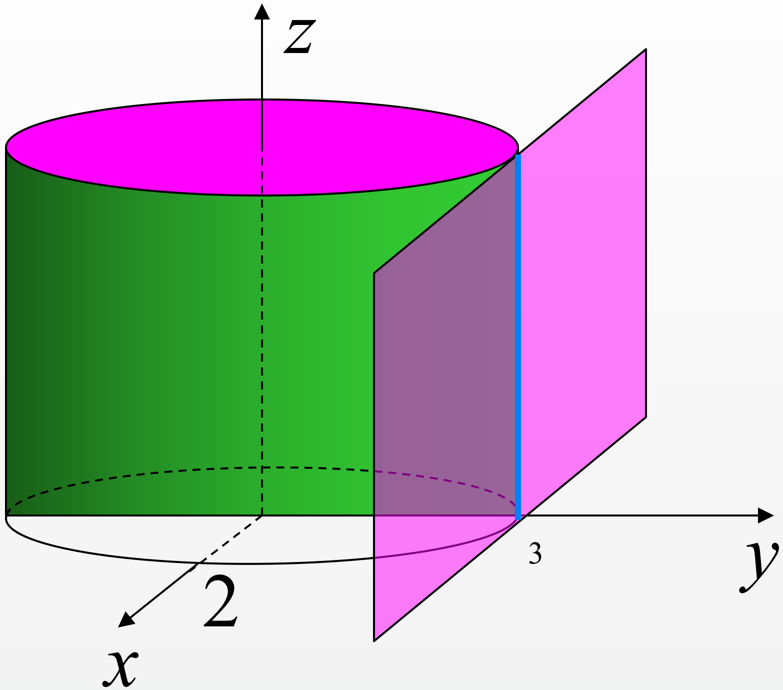
平面方程： $y = x$

五、课堂小结

1. 一般柱面方程的求解。

2. 母线平行于坐标轴的柱面方程。

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$$



思考：对平面 $y=b$

当 $|b|<3$ 时, 交线情况如何?

当 $|b|>3$ 时, 交线情况如何?

谢 谢 大 家！

不足之处请各位指正！