

# 3D空间直线的方程

A pencil and a ruler are positioned in the upper right and lower right corners of the slide, respectively. The pencil is silver and has a sharp lead tip. The ruler is white with black markings and numbers, showing the numbers 9 and 10. The background is a plain, light color.

主讲人：周平

思考：中学学过的平面直线方程有哪些？

## 1. 由直线上一点 $M_0$ 直线的方向向量所决定的直线方程

在空间给定了一点  $M_0$  与一个非零向量  $\vec{v}$ ，那么通过点  $M_0$  与向量  $\vec{v}$  平行的直线  $l$  就唯一的被确定，向量  $\vec{v}$  叫做直线  $l$  的方向向量。

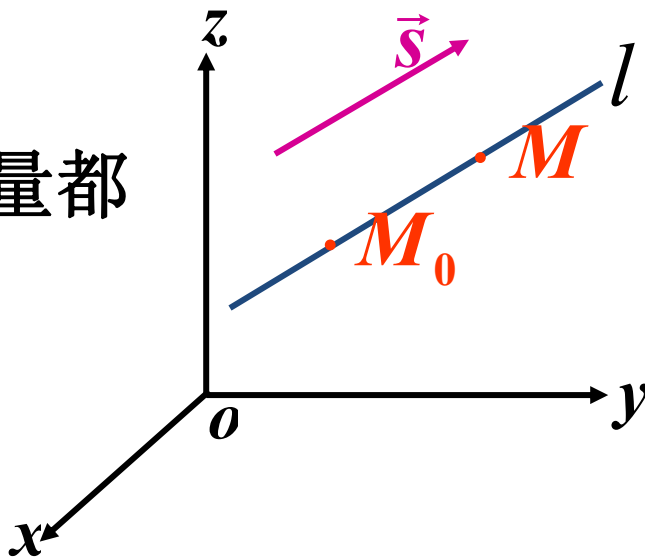
### 方向向量的定义：

任何一个与直线  $l$  平行的非零向量都可以作为直线  $l$  的方向向量。

$$M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z)$$

$$\forall M \in l, \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S}$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\}, \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

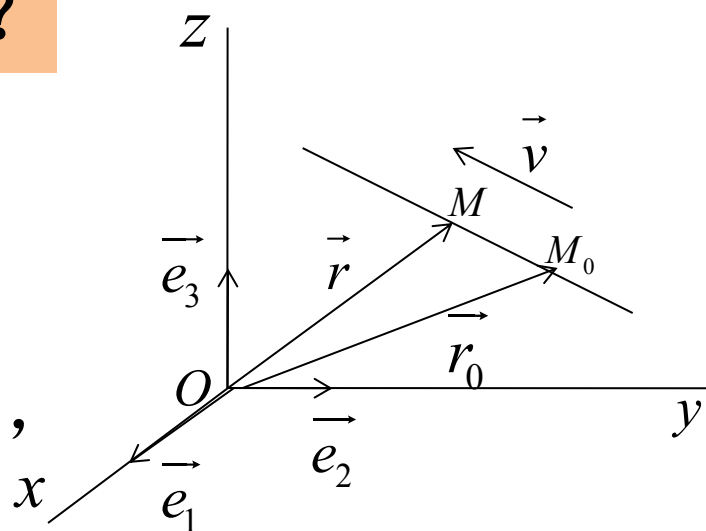


## 想一想：怎样求空间直线的方程呢？

在空间取仿射坐标系  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ,

并设点  $M_0$  的向径为  $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{r}_0$ ,

直线  $l$  上的任意点  $M$  的向径为  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ,



点  $M$  在直线  $l$  上的充要条件为  $\overrightarrow{MM}_0$  与  $\vec{v} \neq \vec{0}$  共线，也就是

$$\overrightarrow{MM}_0 = t\vec{v}$$

即

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{v}$$

所以

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \quad (1)$$

(1) 叫做直线  $l$  的**向量参数方程**，其中  $t$  为参数。



设点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M(x, y, z)$ , 那么  $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ ,



$\vec{r} = \{x, y, z\}$ ; 又设  $\vec{v} = \{X, Y, Z\}$ , 那么由 (1) 式得

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \\ z = z_0 + Zt \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 为参数} \quad (2)$$

(2) 叫做直线  $l$  的**坐标参数方程**。

由 (2) 消去参数  $t$ , 那么得到

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z} \quad (3)$$

(3) 叫做直线  $l$  的**对称式方程**或称直线  $l$  的

**标准方程**。



## 2. 举例应用

**例1** 求通过空间两点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  的直线  $l$  的方程。

**解** 取  $\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$  作为直线  $l$  的方向向量  
设  $M(x, y, z)$  为直线  $l$  上的任意点, 那么

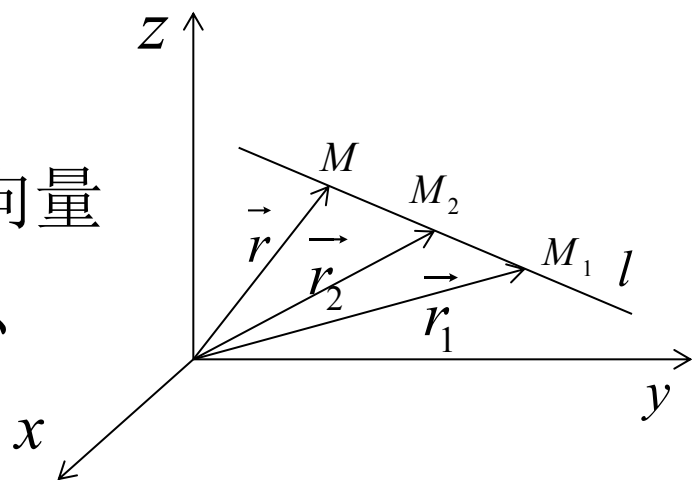
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$$

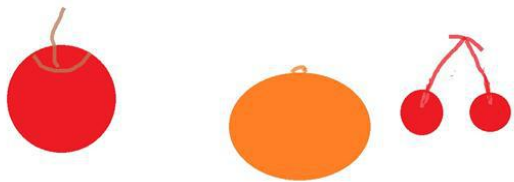
$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\} \quad (i=1, 2)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

所以直线  $l$  的向量式参数方程为  $\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  (4)

坐标式参数方程为 
$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$
 其中  $t$  为参数 (5)





对称式参数方程为 
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6)$$

方程 (4) (5) (6) 都叫做直线  $l$  的**两点式方程**。

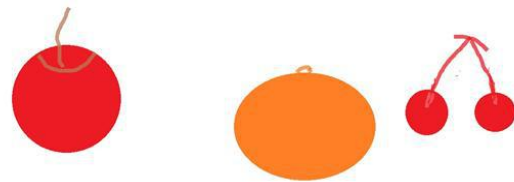
**例2** 求通过点  $M(2, -3, -5)$  且与平面  $6x - 3y - 5z + 2 = 0$  垂直的直线的方程。

**解** 因为直线与平面垂直，所以直线的方向向量与平面的法向量平行  
平面的法向量为

$$\vec{n} = \{6, -3, -5\}$$

即直线方程为

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$$



### 3. 课堂小结

空间直线的向量式参数方程  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$  其中  $t$  为参数

空间直线坐标参数方程 
$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \\ z = z_0 + Zt \end{cases}$$
 其中  $t$  为参数

空间直线标准方程（对称式方程） $\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$

空间直线两点式方程  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

# 思考题

除了以上提到的空间直线方程的形式，还可以用其他的形式来表达空间直线方程吗？如果可以，应该怎样表示呢？



## 4.布置作业

119页的第1题： (2) (4) (5)



谢谢!

