

第六章 线性空间

- 6.1 集合·映射
- 6.2 线性空间的定义与简单性质
- 6.3 维数·基与坐标
- 6.4 基变换与坐标变换
- 6.5 线性子空间
- 6.6 子空间的交与和
- 6.7 子空间的直和
- 6.8 线性空间同构

第一节 集合 • 映射

主要内容

● 集合

● 映射

一、集合

1. 集合的定义

集合——集合是数学中最基本的概念之一，它不能用更简单的概念来定义，而只能对它作些解释。所谓**集合**是指由一些确定的对象(或事物)汇集成的整体，其中每个对象叫集合的**元素**。

通常用大写字母 A, B, X, Y 等表示集合，用小写字母 a, b, x, y 等表示集合的元素。如果元素 a 在集合 A 中，就说“ a 属于 A ”，记作 $a \in A$ ；

如果元素 a 不在集合 A 中，就说“ a 不属于 A ”，记作 $a \notin A$ 。

例如 

2. 集合的表示法

集合的表示法有两种：**列举法**和**描述法**。

列举法：把集合中的元素一一列举出来。

例如，设 M 是由数 1, 2, 3 组成的集合，则 M 可记为

$$M = \{1, 2, 3\}.$$

描述法：即用集合中全部元素所具有的特征性质来表述集合。其格式是

$$M = \{ a \mid a \text{ 具有的性质} \}.$$

例如，适合方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的全部点的

集合 M 可写成

$$M = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

又例如，两个多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式的集合可写成

$$M = \{ d(x) \mid d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x) \}.$$

3. 空集合

不包含任何元素的集合称为**空集合**，记为 \emptyset 。

例如，一个无解的线性方程组的解集合是空集合。

把空集合也看作是集合，这一点与通常的习惯不很一致，但是在数学上有好处，同时也不是完全没有道理的，正如把 0 也看作是数一样。

4. 两个集合之间的关系及其运算

1) 相等

如果两个集合 M 与 N 含有完全相同的元素，即 $a \in M$ 当且仅当 $a \in N$ ，那么它们就称为**相等**，记为

$$M = N.$$

2) 子集合

如果集合 M 的元素全是集合 N 的元素，即由 $a \in M$ 可以推出 $a \in N$ ，那么 M 就称为 N 的**子集合**，记为

$$M \subset N \text{ 或 } N \supset M.$$

例如，全体偶数组成的集合是全体整数组成的集合的子集合。按定义，每个集合都是它自身的子集合。我们规定，空集合是任一集合的子集合。

两个集合 M 和 N 如果同时满足 $M \subset N$ 和 $N \subset M$ ，则 M 和 N 相等。

3) 交集

设 M, N 是两个集合，既属于 M 又属于 N 的全体元素所组成的集合称为 M 与 N 的交集，记为

$$M \cap N.$$

集合 M , N 的交集, 用图示法可表示为如下的
的阴影部分.

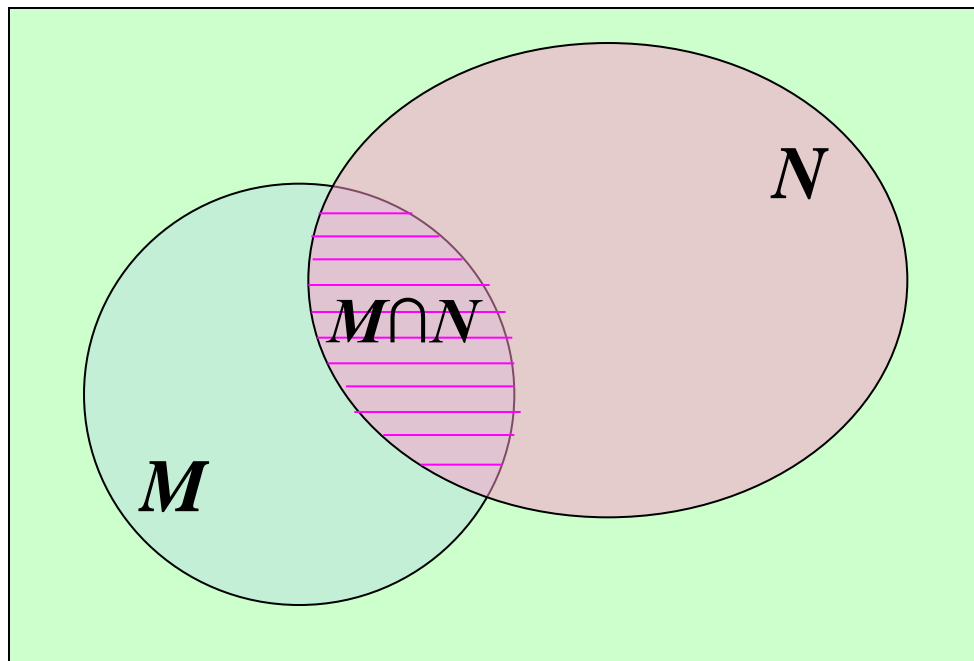


图 6-1

例如，方程 $2x - y = 1$ 的解集合与方程 $x - 2y = 2$

的解集合的交集就是方程组

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

的解集合.

又例如，设 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{2, 3\}$, 则

$$M \cap N = \{2, 3\}.$$

显然有

$$M \cap N \subset M, \quad M \cap N \subset N.$$

4) 并集

属于集合 M 或者属于集合 N 的全体元素所成的集合称为 M 与 N 的 **并集**，记为

$$M \cup N.$$

集合 M, N 的并集，用图示法可表示为如图所示的红色部分。

$$\text{设 } M = \{ 1, 2, 3, 4 \},$$

$$N = \{ 2, 3, 5 \}, \text{ 则 } M \cup N = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}.$$

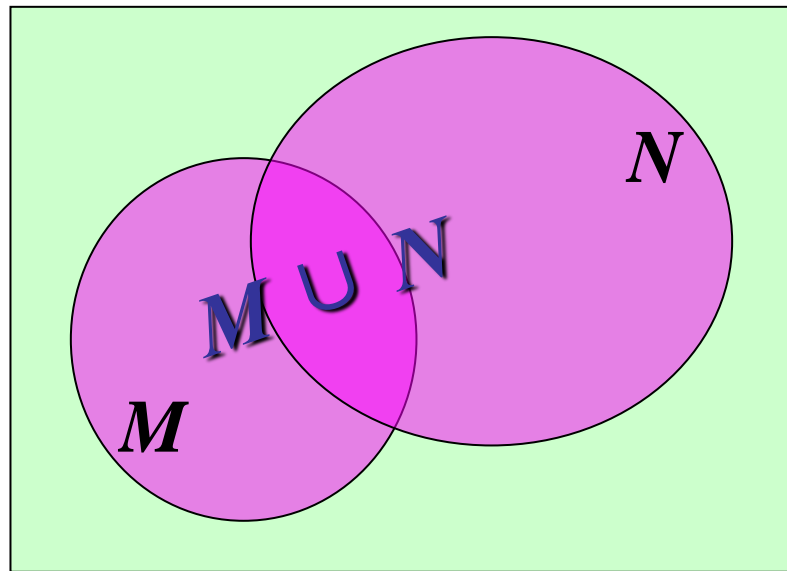


图 6-2

5) 差集

属于集合 M 而不属于集合 N 的所有元素组成的集合称为 M 与 N 的**差集**，记为

$$M - N.$$

集合 M, N 的差集，用图示法可表示为如图所示的红色部分。

$$\text{设 } M = \{ 1, 2, 3, 4 \},$$

$$N = \{ 2, 3, 5 \}, \text{ 则 } M - N = \{ 1, 4 \}.$$

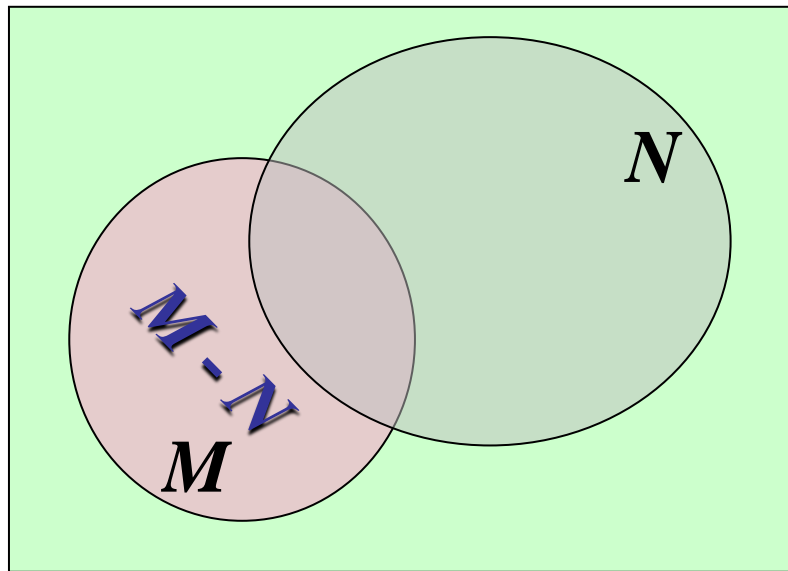


图 6-3

二、映射

1. 映射的定义

定义1 设 M, N 是非空集, 所谓集合 M 到集合 N 的一个**映射**就是指一个法则 σ , 它使 M 中每一个元素 α 都有 N 中一个确定的元素 β 与之对应. 记为

$$\sigma(\alpha) = \beta, \text{ 或 } \sigma: \alpha \rightarrow \beta.$$

β 称为 α 在映射 σ 下的**像**, 而 α 称为 β 在映射 σ 下的一个**原像**.

M 到 M 自身的映射，有时也称为 M 到自身的**变换**。

注意： α 的像是唯一的，但 β 的原像不一定是唯一的。

2. 映射的例子

例 1 M 是全体整数的集合， N 是全体偶数的集合，定义

$$\sigma(n) = 2n, n \in M.$$

这是 M 到 N 的一个映射。

例 2 M 是数域 P 上全体 n 级矩阵的集合,

定义

$$\sigma_1(A) = |A|, A \in M.$$

这是 M 到 P 的一个映射.

例 3 M 是数域 P 上全体 n 级矩阵的集合,

定义

$$\sigma_2(a) = aE, a \in P.$$

E 是 n 级单位矩阵, 这是 P 到 M 的一个映射.

例 4 对于 $f(x) \in P[x]$, 定义

$$\sigma(f(x)) = f'(x).$$

这是 $P[x]$ 到自身的一个映射.

例 5 设 A, B 是两个非空的集合, a_0 是 B 中一个固定的元素, 定义

$$\sigma(a) = a_0, \quad a \in A.$$

即 σ 把 A 中的每个元素都映射到 a_0 , 这是 A 到 B 的一个映射.

例 6 設 M 是一集合，定义

$$\sigma(a) = a, \quad a \in M.$$

即 σ 把每个元素映到它自身，称为集合 M 的**恒等映射**或**单位映射**，记为 1_M 。

例 7 任意一个定义在全体实数上的函数

$$y = f(x)$$

都是实数集合到自身的映射。因此，**函数可以认为是映射的一个特殊情形。**

3. 两个映射相等

定义2 设 σ 、 τ 都是集合 M 到集合 N 的映射，若对 M 中的每个元素 a 都有

$$\sigma(a) = \tau(a)$$

则称它们**相等**，记为 $\sigma = \tau$ 。

4. 映射的乘积

1) 定义

定义3 设 σ 、 τ 分别是集合 A 到 B 和 B 到 C 的两个映射，**乘积** $\tau\sigma$ 定义为

$$(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)), a \in A,$$

即相继施行 σ 和 τ 的结果， $\tau\sigma$ 是 A 到 C 的一个映射。

例如，前面例 2 和例 3 中映射的乘积 $\sigma_1\sigma_2$ 就是把每个 n 级矩阵 A 映到数量矩阵 $|A|E$ ，它是全体 n 级矩阵的集合到自身的一个映射。

对于集合 X 到 Y 的任一映射 σ ，显然有

$$1_Y\sigma = \sigma 1_X = \sigma.$$

2) 运算规律

映射的乘法满足结合律。 设 σ 、 τ 、 φ 分别是集合 A 到 B ， B 到 C ， C 到 D ，则 $\varphi(\tau\sigma) = (\varphi\tau)\sigma$

结合律

$$\varphi(\tau\sigma) = (\varphi\tau)\sigma$$

证明

显然上式两端都是 A 到 D 的映射，要证明它们相等，只需要证明它们对于 A 中每个元素的作用都相同，即

$$\varphi(\tau\sigma)(a) = (\varphi\tau)\sigma(a), \text{ 对于每个 } a \in A.$$

由定义

$$\varphi(\tau\sigma)(a) = \varphi((\tau\sigma)(a)) = \varphi(\tau(\sigma(a))),$$

$$(\varphi\tau)\sigma(a) = (\varphi\tau)(\sigma(a)) = \varphi(\tau(\sigma(a))).$$

证毕

注意： 映射的乘法不满足交换律，例如

设 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x + 1$, 则

$$g(f(x)) = \sin x + 1 ;$$

$$f(g(x)) = \sin(x + 1) .$$

故 $gf \neq fg$.

5. 满射、单射、双射

定义4 设 σ 是集合 X 到 Y 的一个映射, 如果:

(1) 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in X$, 当 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 时, $\sigma(\alpha_1) \neq \sigma(\alpha_2)$, 则称 σ 为 **单射** (或称内射 injection).

(2) $\sigma(X) = Y$, 即对于任意的 $\beta \in Y$, 存在 $\alpha \in X$, 使 $\sigma(\alpha) = \beta$, 则称 σ 为 **满射** (或称映上的 surjection).

(3) 若映射 σ 既是单射又是满射, 则称 σ 为 **双射** (或称一一对应, bijection).

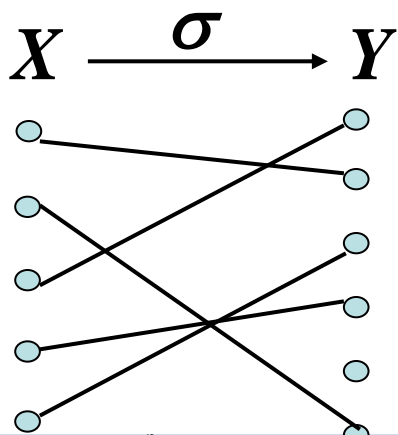
例 8 在例 1 ----例 6 中,

满射的有: 例 1, 2, 4, 6, 当 $n = 1$ 时的例 3;

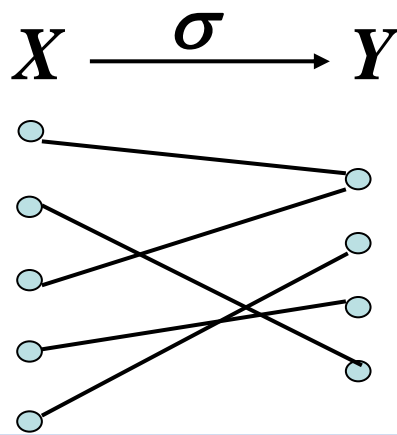
单射的有: 例 1, 3, 6;

双射的有: 例 1, 6.

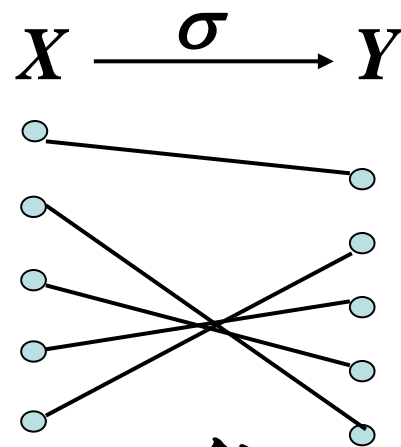
显然，对于由有限多个元素组成的集合，即所谓有限集合来说，两个集合之间存在双射的充分必要条件是它们所含元素的个数相同。于是对有限集合 M 及其子集 $M' \neq M$ ， M 与 M' 就不能建立双射。对无限集合就不一定如此。有限集到有限集的映射的三种情况，可用下图来示意。



单射



满射



双射

6. 逆映射

1) 定义

定义5 设 σ 是集合 X 到 Y 的一个映射，
如果存在集合 Y 到 X 的一个映射 τ ，使

$$\tau\sigma = 1_X \quad \text{和} \quad \sigma\tau = 1_Y$$

同时成立，则称 σ 是**可逆映射**(简称 σ 可逆)，并
称 τ 为 σ 的**逆映射**，记作 $\sigma^{-1} = \tau$ 。

定义中 σ 与 τ 的地位是相同的，此时也说 τ 是
可逆的，且 $\tau^{-1} = \sigma$ 。

2) 逆映射的唯一性

如果映射是可逆的，则其逆映射是唯一的。

证明 设 τ_1, τ_2 是 σ 的两个逆映射，即

$$\tau_1 \sigma = \tau_2 \sigma = 1_X \quad \text{且} \quad \sigma \tau_1 = \sigma \tau_2 = 1_Y.$$

则有

$$\tau_1 = \tau_1 1_Y = \tau_1 (\sigma \tau_2) = (\tau_1 \sigma) \tau_2 = 1_X \tau_2 = \tau_2,$$

故 σ 的逆映射是唯一的。

证毕

3) 映射可逆的条件

集合 X 到 Y 的映射 σ 可逆的充分必要条件是 σ 为双射.

证明 先证必要性 设 σ 可逆, 即有唯一的
从集合 Y 到 X 的映射 τ , 使

$$\tau\sigma = 1_X \quad \text{且} \quad \sigma\tau = 1_Y,$$

于是, 对任意的 $\beta \in Y$, 有

$$\beta = 1_Y(\beta) = (\sigma\tau)(\beta) = \sigma(\tau(\beta)),$$

由于 $\tau(\beta) \in X$, 故 σ 是满射;

又因为, 若 $\sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \alpha_1 &= 1_X(\alpha_1) = (\tau\sigma)(\alpha_1) = \tau(\sigma(\alpha_1)) \\ &= \tau(\sigma(\alpha_2)) = (\tau\sigma)(\alpha_2) = 1_X(\alpha_2) \\ &= \alpha_2, \end{aligned}$$

故 σ 是单射, 从而 σ 是双射.

再证充分性. 设 σ 是双射, 对任意的 $\beta \in Y$, 存在唯一的 $\alpha \in X$, 使 $\sigma(\alpha) = \beta$, 于是可定义集合 Y 到 X 的映射 τ , 使得 $\tau(\beta) = \alpha$, 其中 α 是 X 中与 β 一一对应的元素, 这样, 对任意的 $\alpha \in X$,

都有

$$(\tau \sigma)(\alpha) = \tau(\sigma(\alpha)) = \tau(\beta) = \alpha,$$

所以, $\tau \sigma = 1_X$. 同样, 对任意的 $\beta \in Y$, 都有

$$(\sigma \tau)(\beta) = \sigma(\tau(\beta)) = \sigma(\alpha) = \beta,$$

所以, $\sigma \tau = 1_Y$. 因此 σ 是可逆的.

证毕