3.7空间两直线的相关位置

空间两直线的相关位置

空间两直线的相关位置有异面与共面，在共面中又有相交、平行与重合三种情况。

设两条直线 l_1 与 l_2 的方程为：

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$$

两直线l_1与l_2的相关位置决定于三向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，v_1，v_2的相互关系

1. 当且仅当三向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，v_1，v_2 异面时，l_1与 l_2异面；

2. 当且仅当三向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，v_1，v_2共面时，l_1与 l_2共面 ；

（1）如果v_1不平行v_2，那么l_1与l_2 相交，

（2）如果$v_1 // v_2$但不平行于$\overrightarrow{M_1M_2}$，那么l_1与l_2平行，

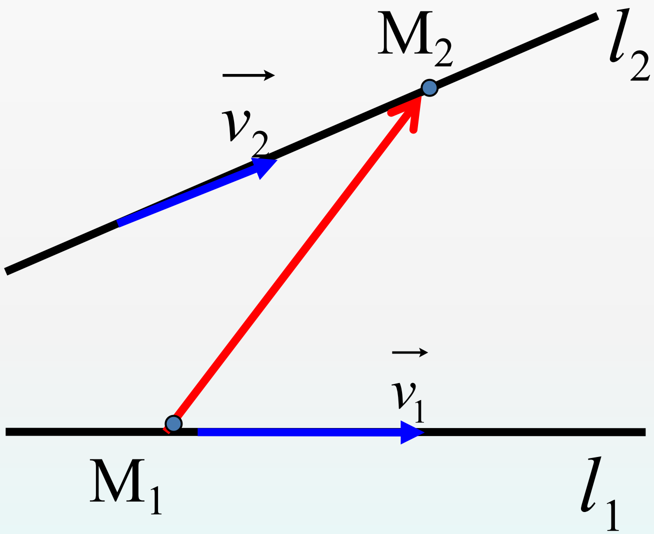
（3）如果$v_1 // v_2 // \overrightarrow{M_1M_2}$，那么$l_1$与$l_2$ 重合。

一、空间两直线的相关位置

1. 定理 判定空间两直线 $l_1:\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1},l_2:\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$

的相关位置的充要条件为：

i 异面 $$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

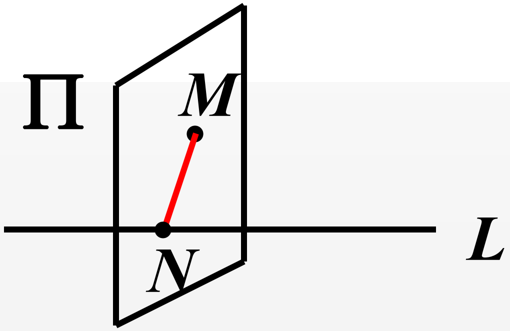


ii 相交 $\Delta=0, X_1:Y_1:Z_1\neq X_2:Y_2:Z_2$

iii 平行 $X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2\neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$

iv 重合 $X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$

例 1 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.



解 先作过点M且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$， 交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=\{\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\}=\{-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\},$$

所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$

例 2　求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解　设所求直线的方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$,

根据题意知　$\vec{s}\perp\vec{n}_1$，$\vec{s}\perp\vec{n}_2$，

取　$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,-3,-1\}$,

所求直线的方程　$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

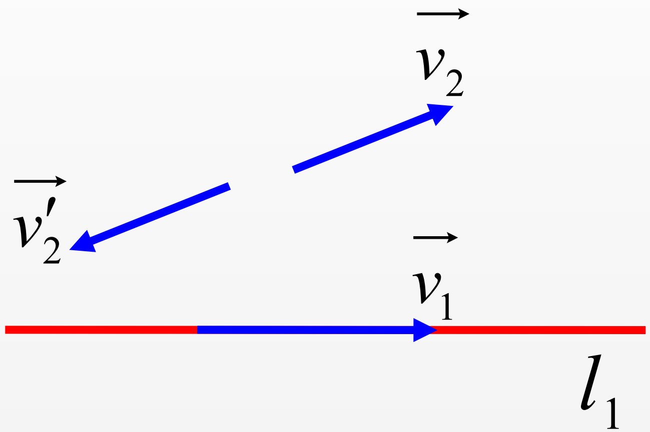
上一页　下一页　返回

二、空间两直线的夹角

1. 定义　两直线的方向向量的夹角，叫做空间两直线的夹角。

记做 $\angle(l_1, l_2)$

$$\angle(l_1,l_2)=\angle\,(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\ \text{或}\ \pi-\angle\,(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$$



2. 定理　在直角坐标系里，空间两直线

$$l_1:\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1},\ \text{与}\ l_2:\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$$

夹角的余弦为：

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\pm\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$$

3. 推论　两直线垂直的充要条件是：$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$

例3. 求以下两直线的夹角

$$L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \qquad L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

解: 直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s_1}=\{1,-4,1\}$

直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\{2,-2,-1\}$

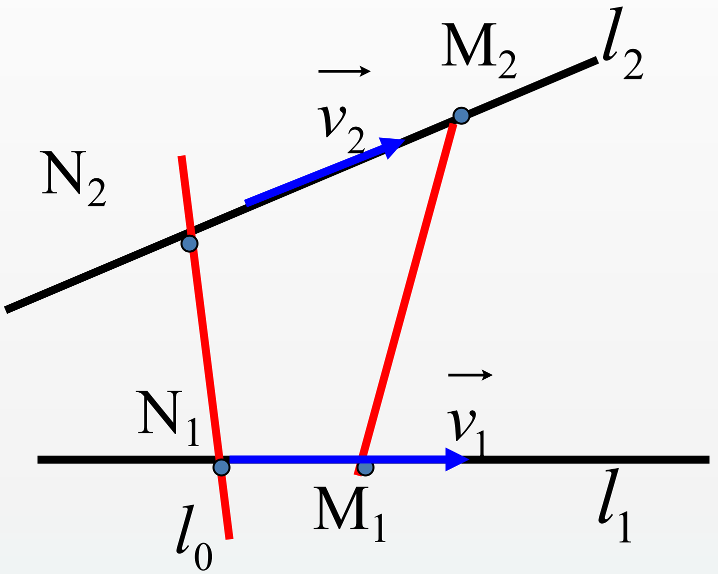
二直线夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\pm\frac{1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

从而 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$

三、两异面直线间的距离与公垂线方程

1. 定义　　空间两直线上的点之间的最短距离，叫做这两条直线之间的距离。



2. 定义　　与两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两异面直线的公垂线，两个交点之间的线段的长叫做公垂线的长。

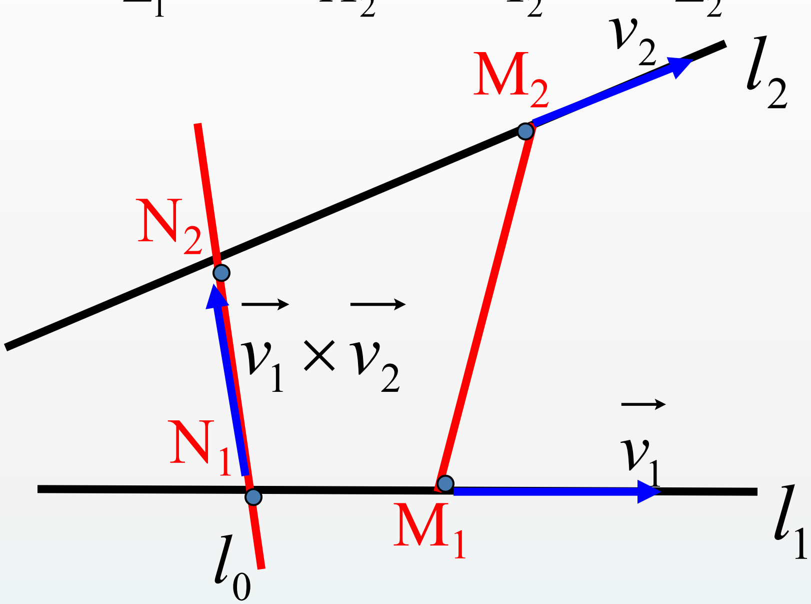
3. 定理　　两异面直线间的距离等于它们公垂线的长。

三、两异面直线间的距离与公垂线方程

4. 定理 两异面直线之间的 $l_1:\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}$, $l_2:\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$

距离公式是：

$$d=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2\right)\right|}{\left|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|}$$



5. 几何意义： 两条异面直线 l_1,l_2 之间的距离等于以 $\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 为棱的平行六面体的体积除以以 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 为邻边的平行四边形的面积.

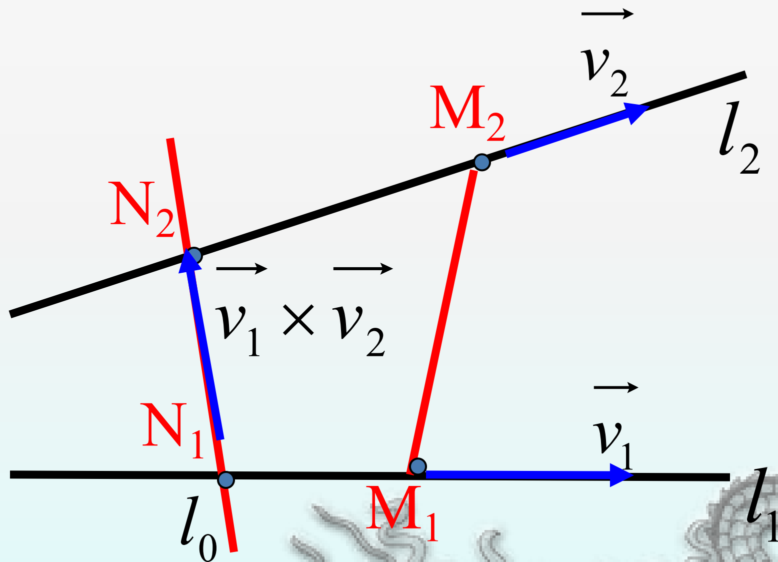
三、两异面直线间的距离与公垂线方程

两异面直线 $l_1: \dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}, l_2: \dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$

的**公垂线**l_0：可看做由过l_1上的点M_1，以$\vec{v_1}$，$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$为方位向量的平面与过l_2上的点M_2，以$\vec{v_2}$，$\vec{v_1}\times\vec{v_2}$为方位向量的平面的交线

于是得**公垂线的方程：**

$$l_0: \begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$



其中$X=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$, $Y=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}$, $Z=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$ 是 $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$的坐标，即l_0的方向数

例4 求通过点P(1, 1, 1)且与两直线

$$l_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, \qquad l_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线方程。

解: **设所求直线的方向向量为** $v=\{X, \ Y, \ Z\}$,

那么所求直线的方程写成:

$$\frac{x-1}{X}=\frac{y-1}{Y}=\frac{z-1}{Z},$$

因为 l 与 l_1, l_2 都相交，l_1 而且过点 $M_1(0,0,0)$，方向矢量为 $v_1=\{1,2,3\}$，l_2 过 点 $M_2\{1,2,3\}$，方 向 矢 量 为 $v_2=\{2,1,4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, V_1, V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

即X-2Y+Z=0

$$(\overrightarrow{M_2P}, V_2, V) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

=0，即 X+2Y−Z=0，

由上两式得：

X：Y：Z=0：2：4=0：1：2

显然又有 $0:1:2\neq1:2:3$, $v\neq v_1$

$0:1:2\neq2:1:4$, 即 $v\neq v_2$.

所以所求直线的方程为

$$\boxed{\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}}$$ 。

例5　已知两直线

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0},l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0},$$

试证明：两直线 l_1 和 l_2 为异面直线，并求 l_1 和 l_2 间的距离与它们的公垂线方程。

解：　因为直线 l_1 过点 $M_1(0,0,-1)$，方向向量为 $v_1=\{1,-1,0\}$，而直线 l_2 过点 $M_2(1,1,1)$，方向向量为 $v_2=\{1,1,0\}$

从而有：

$$\Delta = (\overrightarrow{M_1M_2}, V_1, V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

所以两直线异面

又因为 l_1 与 l_2 的公垂线 l_0 的方向向量可取为

$$v_1 \times v_2 = \{0,0,2\},$$

所以 l_1 与 l_2 之间的距离为

$$d = \frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_2}, V_1, V_2)\right|}{|V_1 \times V_2|} = \frac{4}{2} = 2.$$

再根据公垂线的方程：

$$l_0: \begin{cases} \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0. \end{cases}$$

这条公垂线的方程又可写成

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$$

显然它就是 z 轴。

五、课堂小结

1. 确定两直线位置时,要先确定共面还是异面;

2. 两异面直线的公垂线的确定。

思考题：

两平行直线间的距离如何求？