第七节　子空间的直和

主要内容

- 定义
- 直和的充分必要条件
- 直和的性质
- 多个子空间的直和

一、定义

子空间的直和是子空间的和的一个重要特殊情形.

定义 9 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间，如果和 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2,$$

是唯一的，这个和就称为**直和**，记为 $V_1 \oplus V_2$.

二、直和的充分必要条件

定理 8 和 V_1+V_2 是直和的充分必要条件是等式

$$\alpha_1+\alpha_2=0,\qquad \alpha_1\in V_1,\ \alpha_2\in V_2,$$

只有在 α_1，α_2 全为零时才成立.

证明 定理的条件实际上就是：零向量的分解式是唯一的. 先证明必要性：因为0+0=0，

且由 V_1+V_2 是直和，即其向量的分解是唯一的，

因此，$\alpha_1+\alpha_1=0$，$\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$，$\alpha_1=\alpha_2=0$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

（充分性）：设 $\alpha \in V_1 + V_2$，它有两个分解式

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha = \beta_1 + \beta_2$， $\alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_2$.

于是

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 0,$$

其中 $\alpha_1 - \beta_1 \in V_1, \alpha_2 - \beta_2 \in V_2$． 由定理的条件，有

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0，即\ \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2.$$

这就是说，向量 α 的分解式是唯一的.

证毕

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

推论 和 V_1+V_2 为直和的充分必要条件是

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

证明 先证充分性. 假设有等式

$$\alpha_1+\alpha_2=0, \qquad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2,$$

那么 由 $\alpha_1+\alpha_2=0$, 得 $\alpha_1=-\alpha_2 \in V_2$,

$\alpha_1 \in V_1 \cap V_2$. 同理: $\alpha_2 \in V_1 \cap V_2$.

由假设 $V_1 \cap V_2=\{0\}$, 得

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

这就证明了 V_1+V_2 是直和.

再证必要性： $\forall\alpha\in V_1\cap V_2$

于是零向量可以表示成

$$0=\alpha+(-\alpha),\quad \alpha\in V_1,-\alpha\in V_2.$$

因为是直和，所以 $\alpha=-\alpha=0$． 这就证明了

$$V_1\cap V_2=\{0\}.$$

证毕

定理 9 设 V_1, V_2 是 V 的子空间，令 $W = V_1 + V_2$，则

$$W = V_1 \oplus V_2$$

的充分必要条件为

$$\boxed{维(W) = 维(V_1) + 维(V_2).}$$

证明 因为

$$维(W) + 维(V_1 \cap V_2) = 维(V_1) + 维(V_2),$$

而由前面定理 8 的推论知 $V_1 + V_2$ 为直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$，这是与 $维(V_1 \cap V_2) = 0$

等价的，也就与维$(W)=$维$(V_1)+$维(V_2)等价.

证毕

三、直和的性质

定理 10 若设 U 是线性空间 V 的一个子空间，则一定存在一个子空间 W 使 $V=U\oplus W$.

这时 U 叫做 W 的**补空间**，W 叫做 U 的补空间，或者 U 与 W 是互补子空间.

证明 取 U 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. 把它扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$. 令

$$W = L(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n).$$

则 W 即满足要求.

证毕

例 1 在 3 维空间 P^3 中，过原点的两条相交直线的直和就是由这两条直线所确定的平面．如图6-9所示．

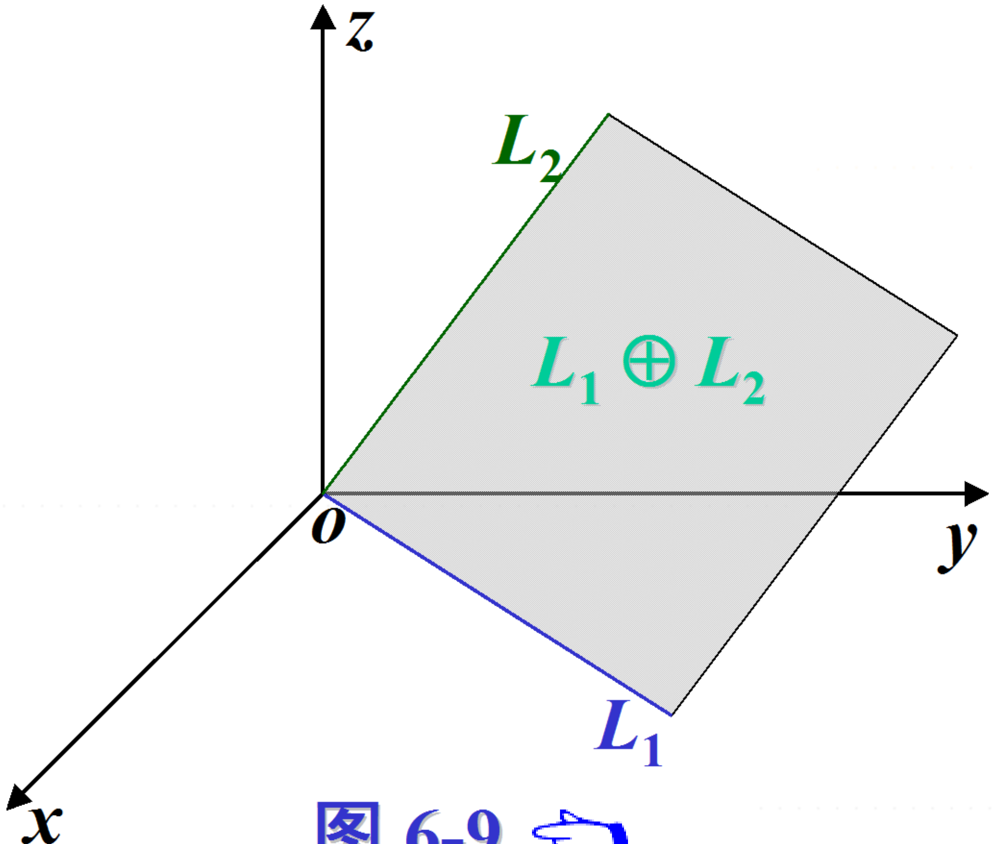

图 6-9

例 2 设 $V=P^3$，L 是过原点的直线，π 是过原点的平面.

令 L 上的点构成的空间为 U，π 上的点构成的空间为 W，

如果 $U\cap W=\{0\}$，即 L 不 π 上，　则 $V=U\oplus W$.

如图 6-10 所示.

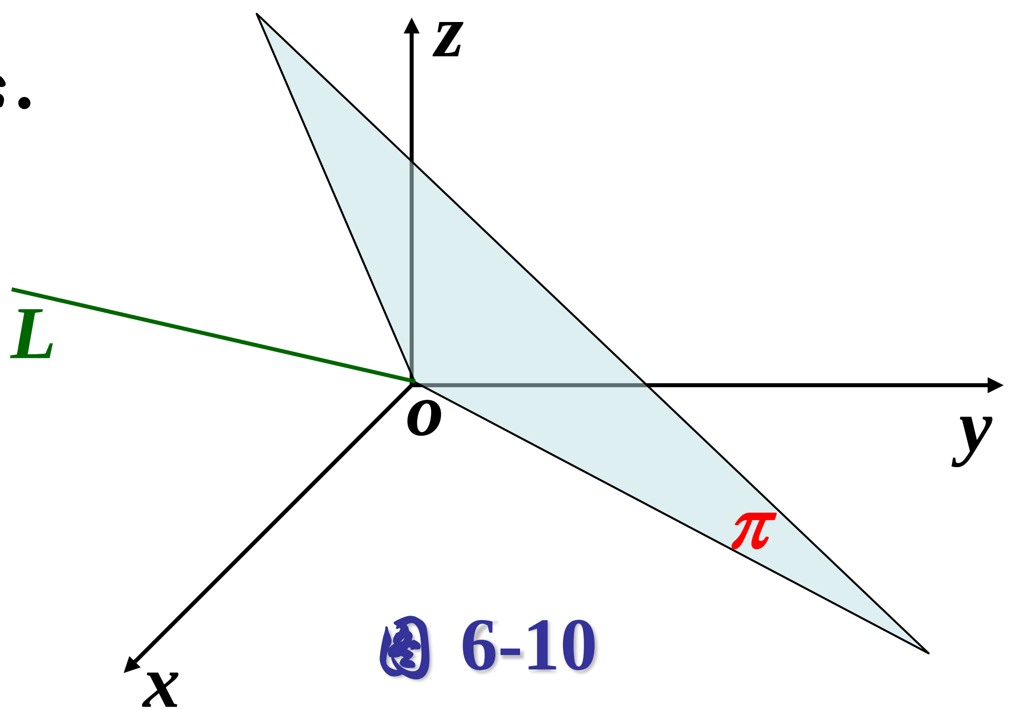

图 6-10

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

例 3 设 $V=P^3$，$U=L(\alpha_1)$，$\alpha_1=(1,1,1)$，求 U 的补空间 W.

解 要求补空间 W，即要求 W 的一组基.

只需把 U 的基扩充为 P^3 的基.

取 $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$,

因为向量组 α_1, e_1, e_2 线性无关，所以它即为 P^3 的基，于是 e_1, e_2 是 W 的一组基，即 $W=L(e_1,e_2)$.

文山学院
WENSHAN UNIVERSITY

四、多个子空间的直和

定义 10 设 $V_1, V_2, \ldots, V_s$ 都是线性空间 V 的子空间.

如果和 $V_1+V_2+\ldots+V_s$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s\ ,\ \alpha_i\in V_i\ (i=1,2,\ldots,s)$$

是唯一的，这个和就称为直和. 记为

$$V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_s\,.$$

定理 11　设 $V_1, V_2, \ldots, V_s$ 都是线性空间 V 的子空间，则下面这些条件是等价的：

1) $W=\sum V_i$ 是直和；

2) 零向量的表法唯一；

3) $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j=\{0\} \quad (i=1,2,\cdots,s)$；

4) 维$(W)=\sum$ 维(V_i).

证明略.

小结

1.请叙述直和的定义。

2.判断两个子空间的和是直和的充分必要条件有哪些方法?

3.如何去求给定的一个线性空间的子空间的补子空间?

4.子空间的直和的概念能否扩充到多个子空间的直和? 若能如何判断多个子空间的和是直和?

思考

- 1.线性空间比较复杂，我们找了基来表示线性空间的向量，但线性空间中各个向量之间的关系仍然很复杂，该怎么研究各个向量之间的联系?
- 2.能否将一个复杂的线性空间中向量之间的联系转移到另一个简单的线性空间中研究?