第三节 线性变换的矩阵

主要内容

- 线性变换、基与基的像
- 线性变换的矩阵
- 向量像的计算公式
- 线性变换在不同基下矩阵的关系
- 相似矩阵

一、线性变换、基与基的像

设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基.

首先来讨论线性变换、基与基的像之间的关系.

空间 V 中任一向量 ξ 可以被基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 线性表出，即有

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n \qquad (1)$$

其中系数是唯一确定的，它们就是 ξ 在这组基下的坐标.

由于线性变换保持线性关系不变，因而在 ξ 的像 A ξ 与基的像 A ε_1, A ε_2, … , A ε_n 之间也必然有相同的关系：

$$\text{A}\,\xi = \text{A}\,(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n)$$

$$= x_1\text{A}(\varepsilon_1) + x_2\text{A}(\varepsilon_2) + \ldots + x_n\text{A}(\varepsilon_n) \qquad (2)$$

上式表明，如果知道了基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 的像，

那么线性空间中任意一个向量 ξ 的像也就知道了，

或者说

1. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基.

如果线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 在这组基上的作用相同，即

$$\mathscr{A}\varepsilon_i=\mathscr{B}\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

那么 $\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

结论1的意义:

一个线性变换完全被它在一组基上的作用所决定.

下面我们进一步指出，基向量的像却完全可以是任意的，

2. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基.

于任意一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 一定有一个线性变换 $\mathscr{A}$ 使

$$\mathscr{A}\varepsilon_i=\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \qquad (3)$$

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

定理1 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 中任意 n 个向量. 存在唯一的线性变换 $\mathscr{A}$ 使

$$\mathscr{A}\varepsilon_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

二、线性变换的矩阵

1. 定义

定义 7 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 V 中的一个线性变换. 基向量的像可以被基线性表出：

$$\begin{cases} \mathscr{A}\varepsilon_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n, \\ \mathscr{A}\varepsilon_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathscr{A}\varepsilon_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n. \end{cases}$$

用矩阵来表示就是

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n)$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A, \qquad (5)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 称为 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵.

例 1 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ 是 $n\,(n>m)$ 维线性空间 V 的子空间 W 的一组基，把它扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. 指定变换 A 如下：

$$\begin{cases} \mathrm{A}\,\varepsilon_i = \varepsilon_i, & \text{当 } i=1,2,\dots,m, \\ \mathrm{A}\,\varepsilon_i = 0, & \text{当 } i=m+1,\dots,n. \end{cases}$$

问题1 变换 A 是不是线性变换？

问题2 求投影 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵？

问题3 求证：$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

定义变换 $\varphi: L(V) \to P^{n\times n}$ 如下：

对于任意的线性变换 $\mathbf{A} \in L(V)$,有 $\varphi(\mathbf{A}) = A$，其中

$$\mathbf{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

问：该映射是不是双射？它是不是同构映射？

结论1 说明这个映射是单射.

结论2 说明这个映射是满射.

换句话说:取定线性空间的一组基之后，可以在线性空间L(v)与n阶方阵之间建立了一个双射.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基，在这组基下，每个线性变换按公式(5)对应一个 $n \times n$ 矩阵.

问：1) 线性变换的和对应的是哪个矩阵?

2) 线性变换的乘积对应的是哪个矩阵?

3) 线性变换的数量乘积对应是哪个矩阵?

4) 可逆的线性变换对应是哪种类型矩阵?

且逆变换是哪个矩阵?

2. 性质

定理 2 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基，在这组基下，每个线性变换按公式 (5) 对应一个 $n \times n$ 矩阵. 这个对应具有以下的性质：

1) 线性变换的和对应于矩阵的和；

2) 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积；

3) 线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积；

4) 可逆的线性变换与可逆矩阵对应，且逆变换对应于逆矩阵.

定理 2 说明数域 P 上 n 维线性空间 V 的全部线性变换组成的集合 $L(V)$ 对于线性变换的加法与数量乘法构成 P 上一个线性空间，与数域 P 上 n级方阵构成的线性空间 $P^{n\times n}$ 同构．

利用线性变换的矩阵可以直接计算一个向量的像.

三、向量像的计算公式

设线性变换 A 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$下的矩阵是$A$，

向量 ξ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下的坐标是$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，

问：A ξ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下的坐标 $(y_1,y_2,\ldots,y_n)=?$

定理 3 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 A，向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 $\mathscr{A}\xi$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 可以按公式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

计算.

证明 由假设 $\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$.

于是 $$\mathbf{A}\xi = \mathbf{A}(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n)$$

$$= x_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + x_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}\varepsilon_n$$

$$= (\mathbf{A}\varepsilon_1, \ \mathbf{A}\varepsilon_2, \cdots, \ \mathbf{A}\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}\xi = (\mathrm{A}\varepsilon_1, \mathrm{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathrm{A}\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\ A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

另一方面，由假设

$$\mathrm{A}\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

由于$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$线性无关，所以

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证毕

四、线性变换在不同基下的矩阵的关系

设线性空间 V 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在两组基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \qquad (6)$$

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \qquad (7)$$

下的矩阵分别为 A 和 B，从基 (6) 到 (7) 的过渡矩阵是 X，

于是 B 与 A 的关系？.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

定理 4 设线性空间 V 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在两组基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \qquad (6)$$

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \qquad (7)$$

下的矩阵分别为 A 和 B，从基 (6) 到 (7) 的过渡矩阵是 X，于是 $B = X^{-1}AX$.

证明 已知

$$(\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A,$$

$$(\mathscr{A}\eta_1, \mathscr{A}\eta_2, \cdots, \mathscr{A}\eta_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)B,$$

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X.$$

于是

$$(\mathscr{A}\eta_1, \mathscr{A}\eta_2, \cdots, \mathscr{A}\eta_n) = \mathscr{A}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$$

$$= \mathscr{A}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X] = [\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)]X$$

$$= (\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n)X$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)AX = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)X^{-1}AX.$$

于是 $(\mathscr{A}\eta_1, \mathscr{A}\eta_2, \cdots, \mathscr{A}\eta_n) = \mathscr{A}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

$$= \mathscr{A}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X]$$

$$= [\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)]X$$

$$= (\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n)X$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)AX$$

$$= (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)X^{-1}AX.$$

$$= (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)X^{-1}AX.$$

由此即得 $B = X^{-1}AX.$ 证毕

定理4指出，同一个线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵之间的关系.

五、相似矩阵

1. 定义

定义 3 设 A，B 为数域 P 上两个 n 级矩阵，如果可以找到数域 P 上的 n 级可逆矩阵 X，使得

$$B = X^{-1}AX,$$

就说 A 相似于 B，记作 $A \sim B$.

2. 性质

1) 反身性：$A \sim A$.

这是因为 $A = E^{-1}AE$.

2) 对称性：如果 $A \sim B$，那么 $B \sim A$.

如果 $A \sim B$，那么有 X 使 $B = X^{-1}AX$. 令 $Y=X^{-1}$

就有 $A = XBX^{-1} = Y^{-1}BY$，所以 $B \sim A$.

3) 传递性：如果 $A \sim B$，$B \sim C$，那么 $A \sim C$.

已知有 X，Y 使 $B = X^{-1}AX$， $C = Y^{-1}BY$. 令

$Z = XY$，就有 $C = Y^{-1}X^{-1}AXY = Z^{-1}AZ$，因此 $A \sim C$.

4) 若 $B_1 = X^{-1}A_1X$， $B_2 = X^{-1}A_2X$， 则

$$B_1 + B_2 = X^{-1}(A_1 + A_2)X\text{；}$$

$$B_1B_2 = X^{-1}(A_1A_2)X.$$

g(x)是数域P上的一个多项式.

若数域P上的矩阵A、B 相似.问： g(A) 与g(B)的关系？

定理 5 线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的；反过来，如果两个矩阵相似，那么它们可以看作同一个线性变换在两组基下所对应的矩阵.

证明 设 n 级矩阵 A 和 B 相似. A 可以看做是 n 维线性空间 V 中一个线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵.

因为 $B = X^{-1}AX$，令

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) X .$$

显然，$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 也是一组基，$\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵就是 B .

例 2 设 V 是数域 P 上一个二维线性空间，线性变换 A 在基 $\varepsilon_1=(1,0)$, $\varepsilon_2=(0,1)$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) 求线性变换 A 在基 η_1, η_2 下的矩阵 B, 其中

$$\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \eta_2=3\varepsilon_1+4\varepsilon_2;$$

2) 求 A^n (n 为正整数).

解 **1)** 由已知条件 A $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

及

$$(\eta_1, \eta_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) 由 $B = X^{-1}AX$，得

$$A = XBX^{-1}.$$

所以

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\text{个}} = \underbrace{(XBX^{-1})(XBX^{-1})\ldots(XBX^{-1})}_{n\text{个}}$$

$$= XB^nX^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4(-1)^n+3\cdot 6^n & 3(-1)^{n+1}+3\cdot 6^n\\ 4(-1)^{n+1}+4\cdot 6^n & 3(-1)^n+4\cdot 6^n\end{pmatrix}.$$