

# 最大公因式的计算

## -----辗转相除法

文山学院 数学与工程学院

黄卫华（副教授）



## 两个问题：

- 1. 是否任意两个多项式都有最大公因式？
- 2. 如何求两个多项式的最大公因式？



# 最大公因式的计算

## -----辗转相除法



**定理** 对于  $P[x]$  中任意两个多项式  $f(x), g(x)$ ,  
在  $P[x]$  中存在一个最大公因式  $d(x)$ , 且  $d(x)$  可以表成  
 $f(x), g(x)$  的一个组合, 即有  $P[x]$  中多项式  $u(x), v(x)$  使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x) \quad \text{贝祖等式}$$

证明: 特殊情况:

(1)  $f(x) = g(x) = 0$ , 则  $(f(x), g(x)) = 0$ .

任取  $u(x), v(x)$  即可使得  $0 = u(x) \cdot 0 + v(x) \cdot 0$



(2) 如果  $f(x), g(x)$  有一个为零, 譬如说,  $g(x) = 0$ , 那么  $f(x)$  就是一个最大公因式, 且

$$f(x) = 1 \cdot f(x) + 1 \cdot 0.$$

一般情形. 若  $f(x) \neq 0$ , 且  $g(x) \neq 0$ . 按带余除法, 用  $g(x)$  除  $f(x)$ , 得到商  $q_1(x)$ , 余式  $r_1(x)$ ; 如果  $r_1(x) \neq 0$ , 就再用  $r_1(x)$  除  $g(x)$ , 得到商  $q_2(x)$ , 余式  $r_2(x)$ ; 又如果  $r_2(x) \neq 0$ , 就用  $r_2(x)$  除  $r_1(x)$ , 得到商  $q_3(x)$ , 余式  $r_3(x)$ ; 如此辗转相除下去, 显



然，所得余式的次数不断降低，即

$$\partial (g(x)) > \partial (r_1(x)) > \partial (r_2(x)) > \dots$$

因此在有限次之后，必然有余式为零.于是有一串等式：

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x),$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x),$$

$$\begin{matrix} \dots\dots\dots \\ r_{i-2}(x) = q_i(x)r_{i-1}(x) + r_i(x), \\ \dots\dots\dots \end{matrix}$$

$$r_{s-3}(x) = q_{s-1}(x)r_{s-2}(x) + r_{s-1}(x),$$

$$r_{s-2}(x) = q_s(x)r_{s-1}(x) + r_s(x),$$

$$r_{s-1}(x) = q_{s+1}(x)r_s(x) + 0.$$



$r_s(x)$  与  $0$  的最大公因式是  $r_s(x)$  . 根据前面的说明,  $r_s(x)$  也就是  $r_s(x)$  与  $r_{s-1}(x)$  的一个最大公因式; 同样的理由, 逐步推上去,  $r_s(x)$  就是  $f(x)$  与  $g(x)$  的一个最大公因式.

由等式  $r_{s-2}(x) = q_s(x) r_{s-1}(x) + r_s(x)$ , 得

$$r_s(x) = r_{s-2}(x) - q_s(x) r_{s-1}(x) .$$

再由等式  $r_{s-3}(x) = q_{s-1}(x) r_{s-2}(x) + r_{s-1}(x)$ , 得

$$r_{s-1}(x) = r_{s-3}(x) - q_{s-1}(x) r_{s-2}(x) ,$$



$$\text{由 } \left. \begin{aligned} r_s(x) &= r_{s-2}(x) - q_s(x) r_{s-1}(x) \\ r_{s-1}(x) &= r_{s-3}(x) - q_{s-1}(x) r_{s-2}(x) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$r_s(x) = (1 + q_s(x) q_{s-1}(x)) r_{s-2}(x) - q_s(x) r_{s-3}(x).$$

然后根据同样的方法用它上面的等式逐个地消去

$r_{s-2}(x), \dots, r_1(x)$ , 再并项就得到

$$r_s(x) = u(x) f(x) + v(x) g(x),$$

这就是定理中的贝祖等式.



最后我们来证明 $r_s(x)$ 就是最大公因式.

设 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意一个公因式.

则 $h(x) \mid f(x)$ 且 $h(x) \mid g(x)$ , 则

$h(x) \mid u(x)f(x) + v(x)g(x)$ , 即 $h(x) \mid r_s(x)$ .

再加上 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式, 可得

$r_s(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

定理证明中用来求最大公因式的方法通常称为

**辗转相除法.(欧几里得算法)**



**例** 设  $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$ ,  $g(x) = x^3 - 2x + 1$ , 求  $(f(x), g(x))$  和  $u(x), v(x)$ , 使  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$ .

**解** 辗转相除法可按下面的格式来作:

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x) = x + 1$	$x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ $x^3 - x^2$	$x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$ $x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x$	$q_1(x) = x - 1$
	$x^2 - 2x + 1$ $x^2 - x$	$-x^3 + x^2 + x - 1$ $-x^3 - 0x^2 + 2x - 1$	
$r_2(x) = -x + 1$		$r_1(x) = \begin{array}{l} x^2 - x \\ x^2 - x \\ \hline 0 \end{array}$	$q_3(x) = -x$

于是  $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$

$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$

$r_1(x) = q_2(x)r_2(x)$

由此可得： $r_2(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

$$(f(x), g(x)) = -r_2(x)$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \quad \rightarrow \quad r_2(x) = g(x) - q_2(x)r_1(x)$$

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) \quad \rightarrow \quad r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x)$$

$$r_2(x) = [-q_2(x)]f(x) + [1 + q_2(x)q_1(x)]g(x)$$

因此，取 $u(x) = q_2(x) = x+1$      $v(x) = -[1 + q_2(x)q_1(x)] = -x^2$

就有  $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$  .

## 思考与作业

1. 辗转相除法的依据?
2. 贝祖等式中  $u(x), v(x)$  是否唯一?
3. 作业见习题册.

