第三节　　同　构

主要内容

- 线性空间的同构及其性质的复习
- 同构的定义
- 同构的性质

一、线性空间的同构及其性质的复习

1. 定义 11 数域 P 上两个线性空间 V 与 V' 称为**同构**的，如果由 V 到 V' 有一个**双射** σ，具有以下性质：

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$；

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$， 其中 α,β 是 V 中任意向量，k 是 P 中任意数. 这样的映射 σ 称为**同构映射**.

2. 线性空间的同构的性质

1）同构映射的**逆映射**以及两个同构映射的**乘积**仍然是同构映射.

2）线性空间的同构具有**反身性、对称性与传递性**.

3）数域 P 上两个有限维线性空间同构的充要条件是维数相同.

二、同构的定义

定义 8 实数域 R 上欧氏空间 V 与 V' 称为**同构**的，如果由 V 到 V' 有一个双射 σ，满足

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$,

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$,

3) $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$,

这里 $\alpha,\beta\in V, k\in \mathrm{R}$，映射 σ 称为 V 到 V' 的**同构映射**.

问：如果 σ 是欧氏空间 V 到 V' 的一个同构映射，那么 σ 是不是 V 到 V' 作为线性空间的同构映射？

因此，同构的欧氏空间必有相同的维数.

设 V 是一个 n 维欧氏空间，在 V 中取一组标准正交基

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. $\forall \alpha \in V$, 有

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n .$$

令 $$\sigma(\alpha) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n .$$

问：σ 是不是 V 到 R^n 的同构映射？ yes!

σ 是 V 到 R^n 的一个同构映射，

由此可知，每个 n 维的欧氏空间都与 R^n 同构 .

二、同构的性质

同构作为欧氏空间之间的关系具有以下性质：

1) 反身性

2) 对称性

3) 传递性

问:设V_1和V_2任意的两个n维欧氏空间， V_1和V_2同构?

任意两个 n 维欧氏空间都同构.

定理 3　两个有限维欧氏空间同构的充要条件

它们的维数相同.

小结和作业

1.请叙述同构映射及两个欧氏空间同构的定义.

2.请叙述欧氏空间同构映射具有哪些性质?

3.两个有限维的欧氏空间同构的充要条件?