第二节　矩阵的运算

主要内容

- 加　法
- 乘　法
- 数量乘法
- 转　置

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

一、加法　1. 定义

定义 1 设 $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$,

$$B=(b_{ij})=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

是两个 $s\times n$ 矩阵，则矩阵

$$C=(c_{ij})_{sn}=(a_{ij}+b_{ij})_{sn}$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}
$$

称为矩阵 A 与矩阵 B 的**和**，记为

$$
C = A + B .
$$

注意

1) 相加的矩阵必须有相同的行数和列数;

2) 矩阵的加法是两个同型矩阵对应位置上的元素相加.

2. 零矩阵和负矩阵

元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为O_{sn}，

在不引起含混的时候，可简单地记为 O.

矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的负矩阵，记为 $-A$.

显然有 $A+(-A)=O$

矩阵的减法定义为 $A-B=A+(-B)$

例 1 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 3 & -6\end{pmatrix}$$

求（1）矩阵 $A+B$， $B+A$.

（2）矩阵 $-B$，$A-B$，$A+O$.

（3）矩阵 $(A+B)+C$， $A+(B+C)$.

问：矩阵的加法满足哪些运算规律？

3. 运算规律

1)交换律 $A+B=B+A$;

2) 结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) 零矩阵的运算 $A+O=A$; $A+(-A)=O$;

4) 减法 $A-B=A+(-B)$.

5) 和矩阵的秩 $\boxed{秩(A+B)\le 秩(A)+秩(B)}$

提示：5) 的证明利用向量的极大线性无关组的概念.

二、矩阵的乘法

引例　总收入与总利润问题

设某地有甲、乙、丙三个工厂，每个工厂都生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 4种产品.已知每个工厂的年产量(单位：个)如下表所示：

工厂 \ 产品	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

已知每种产品的单价(万元/个)和单位利润(万元/个)如下表所示:

项目 / 产品	单　价	单位利润
Ⅰ	10	2
Ⅱ	15	4.5
Ⅲ	30	12
Ⅳ	20	6

求各工厂的总收入与总利润.

解 容易算出各工厂的总收入与总利润，列表如下：

项目 / 工厂	总收入	总利润
甲	1850	565
乙	2800	1035
丙	1975	677.5

本例中的三个表格可用三个矩阵表示，设

$$A=\begin{pmatrix}20&30&10&45\\15&10&70&20\\20&15&35&25\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}10&2\\15&4.5\\30&12\\20&6\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1850&565\\2800&1035\\1975&677.5\end{pmatrix},$$

如果记 $A=(a_{ij})_{3\times4}$，$B=(b_{ij})_{4\times2}$，$C=(c_{ij})_{3\times2}$，

则 $c_{ij}=?\ \ ?\ \ ?\ \ ?$ ，$i=1,2,3,\ j=1,2.$

2. 定义

定义 2 设有两个矩阵

$$A=(a_{ik})_{sn}, \quad B=(b_{kj})_{nm},$$

那么矩阵 $C=(c_{ij})_{sm}$，

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$. (6)

称为 A 与 B 的**乘积**，记为 $C=AB$.

问：矩阵的乘法什么条件下才可以乘?

两个矩阵乘积结果中的元素如何求?

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

例 2 计算两个矩阵的乘积.

（1）$A=\begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 & 45 \\ 15 & 10 & 70 & 20 \\ 20 & 15 & 35 & 25 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 15 & 4.5 \\ 30 & 12 \\ 20 & 6 \end{pmatrix}$ 则 $AB=\begin{pmatrix} 1850 & 565 \\ 2800 & 1035 \\ 1975 & 677.5 \end{pmatrix}$

（2）$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，则 $AB=$

解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

例 3 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

求（1）AB、 BA 和 CB.

（2）AB 与 BA 相等吗？ AB 与 CB 相等吗？

例 4 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$

的乘积 BA.

关于矩阵的乘法运算，需要注意以下几点

(1) 矩阵的乘法运算一般不满足交换律.

(2) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

(3) 矩阵的乘法不满足消去律，

即若 $AB = CB, B \neq O$, 不一定能推出 $A = C$.

例 5 线性方程组的一般式如下，写成其矩阵形式.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则上述线性方程组可写成如下矩阵形式：

$$\boxed{AX = B.}$$

线性方程组的表示形式除了刚才的一般形式和矩阵形式之外还有其它的表示形式吗？

3. 矩阵乘法运算规律

1) $O_{k\times m}A_{m\times p}=O_{k\times p}$，$A_{m\times p}O_{p\times n}=O_{m\times n}$；

2) 结合律 $(AB)C = A(BC)$;

3) 分配律 $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.

下证结合律成立

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

证明 设 $A=(a_{ij})_{sn}$, $B=(b_{jk})_{nm}$, $C=(c_{kl})_{mr}$,

下面证明 $(AB)C=A(BC)$.

令 $V=AB=(v_{ik})_{sm}$, $W=BC=(w_{jl})_{nr}$,

其中 $$v_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\quad(i=1,2,\cdots,s;k=1,2,\cdots,m),$$

$$w_{jl}=\sum_{k=1}^{m}b_{jk}c_{kl}\quad(j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,r).$$

因为 $(AB)C=VC$

中 VC 的第 i 行第 l 列元素为

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} &= v_{i1}c_{1l} + v_{i2}c_{2l} + \cdots + v_{im}c_{ml} \\
&= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})c_{1l} + \\
&\quad (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2})c_{2l} + \cdots + \\
&\quad (a_{i1}b_{1m} + a_{i2}b_{2m} + \cdots + a_{in}b_{nm})c_{1m} \\
&= a_{i1}(b_{11}c_{1l} + b_{12}c_{2l} + \cdots + b_{1m}c_{ml}) + \\
&\quad a_{i2}(b_{21}c_{1l} + b_{22}c_{2l} + \cdots + b_{2m}c_{ml}) + \cdots + \\
&\quad a_{in}(b_{n1}c_{1l} + b_{n2}c_{2l} + \cdots + b_{nm}c_{ml}) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

而 $$A(BC)=AW$$

中 AW 的第 i 行第 l 列元素为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_{jl} = a_{i1}w_{1l} + a_{i2}w_{2l} + \cdots + a_{in}w_{nl}$$

$$= a_{i1}(b_{11}c_{1l} + b_{12}c_{2l} + \cdots + b_{1m}c_{ml}) +$$

$$a_{i2}(b_{21}c_{1l} + b_{22}c_{2l} + \cdots + b_{2m}c_{ml}) + \cdots +$$

$$a_{in}(b_{n1}c_{1l} + b_{n2}c_{2l} + \cdots + b_{nm}c_{ml}) \qquad (8)$$

所以 (7) 与 (8) 的结果是一样的，这就证明了结合律.

证毕

4. 单位矩阵

主对角线上的元素全是1,其余元素全是0的$n \times n$矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 级单位矩阵，记为 E_n，

在不致引含混的时候简单写为E或者I.

问：单位矩阵E的作用或地位是什么？

提示：考虑$EA=?$ $AE=?$

5. 方幂

1) 定义

如果 A 是 $n\times n$ 级矩阵，那么，AA 有定义，

$\underbrace{AA\cdots A}_{m\text{个}A}$ 也有意义，因此有下述定义：

定义 设 A 是 $n\times n$ 级矩阵，m 是正整数，m 个 A 相乘

称为 A 的 m 次幂，记为 A^m，即

$$\boxed{A^m=\underbrace{AA\cdots A}_{m\text{个}A}}$$

另外还规定， $A^0=E.$

2) 方幂的运算规律

设 A 为方阵, k, l 为正整数, 则

$$A^k A^l = A^{k+l},\ (A^k)^l = A^{kl}.$$

问: 两个 n 级矩阵 A 与 B ,一般来说 $(AB)^k$ 与 $A^k B^k$ 相等吗?

三、数量乘法

1. 定义

定义 4 矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 与数 k 的**数量乘积**，记为 kA.

用数 k 乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘以 k.

2. 运算规律

$$(k+l)A = kA + lA,$$

$$k(A+B) = kA + kB,$$

$$k(lA) = (kl)A,$$

$$1A = A,$$

$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

3. 数量矩阵

定义 矩阵 $kE=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$ 称为**数量矩阵**.

设 A 是任意的一个 $n\times n$ 矩阵，则有

$$kA=(kE)A=A(kE).$$

问：这个式子说明什么？

这个式子说明，数量矩阵与所有的 $n\times n$ 矩阵作乘法是可交换的. 可以证明：如果一个 n 级矩阵与所有 n 级矩阵作乘法是可交换的，那么这个矩阵一定是数量矩阵. 关于数量矩阵，还有以下运算性质：

$$kE + lE = (k + l)E,$$

$$(kE)(lE) = (kl)E,$$

这就是说，数量矩阵的加法与乘法完全归结为数的加法与乘法.

例 6 设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{pmatrix},$$

计算 $A^2, A^3, A^n\ (n>3)$.

这一步很关键
也很巧妙!

解 设

$$A=\lambda E+B,$$

其中 E 为三阶单位方阵, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$

所以

$$A^n = (\lambda E + B)^n$$

$$= \lambda^n E + n\lambda^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2!} \lambda^{n-2} B^2 + \cdots + B^n.$$

注意到, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{B}^4 = \ldots = \boldsymbol{B}^n = \boldsymbol{O}$,

因而

$$A^n=(\lambda E+B)^n$$

$$=\lambda^n E+n\lambda^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2!}\lambda^{n-2}B^2$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ & & \lambda^n\end{pmatrix}$$ **(*n*≥2).**

四、 转置

1. 定义

定义 5 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$,

所谓 A 的**转置**就是指矩阵$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$.

矩阵 A 的转置矩阵也可记为 A^{T}.

2. 运算规律

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A,$$

$$(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}},$$

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}},$$

$$(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}.$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

例 7 设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

验证 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

解 因为

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

所以 $$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

又 $$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix},\ B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix},$$

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

故 $$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

小结和作业

1.你学会了矩阵哪几种运算，它们分别怎么运算？

2. 矩阵的乘法如何计算？两个矩阵的乘积有没有条件？

3.作业见学习通.