第四节　正定二次型

主要内容

- 正定二次型的定义
- 实二次型正定性的判别方法
- 实二次型的其他类型及其判别法

一、正定二次型的定义

1. 定义

定义 4 实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 称为**正定的**，如果对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 都有 $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) > 0$.

例如 二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

是不是正定的？

二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$$

是不是正定的?

不是正定的，因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+x_3^2$

所以，有 $f(1,-1,0)=0$.

2. 两个基本结论

1) 实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

正定的充分必要条件是 $d_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

证明

2) 非退化实线性替换是否保持正定性不变?

证明 2

二、实二次型正定性的判别方法

1. 惯性指数法

定理 6 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n.

证明 设二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经过非退化实线性替换变成标准形 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2$

由基本结论 1 知，该标准形是正定的充要条件 $d_i > 0$，$i = 1, 2, \dots, n$，即正惯性指数为 n. 由二次型经非退化的线性替换，正定性保持不变即得证.

定理6说明，正定二次型$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$.

定义5 实对称矩阵A称为正定的,若二次型$X^{\mathrm{T}}AX$正定.

因为二次型$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$的矩阵是单位矩阵$E$所以一个实对称矩阵是正定充要条件它与单位矩阵合同，

由此得：

推论1 实对称矩阵A正定的充要条件是存在可逆矩阵C，使得$A = C^{\mathrm{T}}C$.

证明　设 A 为实对称矩阵，则由**定理 6** 有

实对称矩阵 A 正定

等价

实二次型 X^TAX 正定

等价

实二次型 X^TAX 的规范型是 $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$

等价

矩阵 A 与 E 合同

等价

存在可逆矩阵 C，使 $A=C^TEC=C^TC$.

证毕

推论 2 正定矩阵的行列式大于零.

证明 设 A 是一正定矩阵，则由推论 1 知，存在可逆矩阵 C，使

$$A = C^{\mathrm{T}}C.$$

两边取行列式，就有

$$|A| = |C^{\mathrm{T}}||C| = |C|^2 > 0.$$

证毕

例 1 证明：若 A 是正定矩阵，则 A^{-1} 也是正定的.

证明 由正定矩阵的定义知，正定矩阵是实对称矩阵，由推论 2 知,正定矩阵 A 是可逆的,且 $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} = A^{-1}$，所以 A^{-1} 也是实对称矩阵. 证明其正定性的方法很多.

方法 1 方法 2 方法 3

例 2 用惯性指数法判断三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3$$

是否是正定二次型.

解法 1 用配方法

解法 2 用初等变换法

2. 顺序主子式法

定义 6 子式
$$H_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为矩阵 $A=(a_{ij})_{nn}$ 的**顺序主子式**.

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

定理 7 实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$$

是正定的充要条件为矩阵 A 的顺序主子式全大于0.

证明 先证必要性 设二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$ 是正定的.

对于每个 k，$1\le k\le n$，令 $f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j$.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

下证 f_k 是一个 k 元的正定二次型.

对于任意一组不全为零的实数 $c_1, \ldots, c_k$ 有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}c_ic_j$$

$$= f(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0 .$$

因此 $f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 是正定的. 由推论2

f_k 的矩阵的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \cdots, n .$

这就证明了正定二次型的矩阵 A 的顺序主子式全大于零.

再证充分性 对 n 作数学归纳法.

当 $n=1$ 时,

$$f(x_1)=a_{11}x_1^2,$$

由条件 $a_{11}>0$ 显然有 $f(x_1)$ 是正定的.

假设充分性的论断对于 $n-1$ 元二次型已成立,

现在来证 n 元的情形.

把矩阵 A 可以分块成 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^{T} & a_{nn} \end{pmatrix}.$

既然 A 的顺序主子式全大于零，当然 A_1 的顺序主子式也全大于零. 由归纳法假设，A_1 是正定矩阵，换句话说，有可逆的 $n-1$ 级矩阵 G 使

$$G^{\mathrm{T}}A_1G = E_{n-1},$$

这里 E_{n-1} 代表 $n-1$ 级单位矩阵. 令 $C_1 = \begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$，于是

$$C_1^{\mathrm{T}}AC_1 = \begin{pmatrix} G^{\mathrm{T}} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{n-1} & G^{\mathrm{T}}\alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}}G & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

再令 $C_2=\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^{\mathrm{T}}\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$， 有

$$C_2^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}AC_1C_2=\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^{\mathrm{T}}G & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & G^{\mathrm{T}}\alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}}G & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^{\mathrm{T}}\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a_{nn}-\alpha^{\mathrm{T}}GG^{\mathrm{T}}\alpha \end{pmatrix}.$$

令 $C=C_1C_2$， $a_{nn}-\alpha^{\mathrm{T}}GG^{\mathrm{T}}\alpha=a$，

就有 $C^{\mathrm{T}}AC=diag(1,1,\cdots,1,a)$.

两边取行列式，$|C|^2|A|=a$.

由条件 $|A|>0$ 得 $a>0$. 这就说明，矩阵 A 与单位矩阵合同，所以，A 是正定矩阵，或者说二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定的. 充分性得证.

证毕

例 3 利用顺序主子式法判别例题2二次型的正定性.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2+x_2x_3$$

三、实二次型的其他类型及其判别法

1. 定义

定义 7 设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是一实二次型,对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$,

若都有 $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) < 0$, 则 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 称为**负定的**;

若都有 $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) \geq 0$, 则 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 称为**半正定的**;

若都有 $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) \leq 0$, 则 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 称为**半负定的**;

否则就称之为**不定的**.

2. 判别法

定理 8 对于实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^{T}AX,$$

其中 A 是实对称的，下列条件等价：

(1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定的，

(2) 它的正惯性指数与秩相等，

(3) 有可逆实矩阵 C，使

$$C^{T}AC = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

其中 $d_i \geq 0$，$i = 1, 2, \dots, n$，

(4) 有实矩阵 C 使

$$A = C^{\mathrm{T}}C,$$

(5) A 的所有主子式皆大于或等于零.

(所谓主子式是指行指标与列指标相同的子式)

注意，在 (5) 中，仅有顺序主子式大于或等于零是不能保证半正定性的. 比如

$$f(x_1, x_2) = -x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

就是一个反例.

对于负定和半负定二次型的判别有以下方法：

对于实二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=X^TAX$，其中 $A^T=A$，则

(1) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$是负定的充要条件是它的负惯性指数等于n；

(2) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$是半负定的充要条件是它的负惯性指数等于秩.

因为A负定与$(-A)$正定是等价的. 所以实对称矩阵A负定充要条件是A的奇数阶顺序主子式都小于零，A的偶数阶顺序主子式都大于零.

例 4 判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$$

的正定性.

小结和作业

1.请叙述二次型正定、矩阵的正定的定义?

2. 归纳判断二次型是否为正定二次型的方法?

3.作业见习题册.