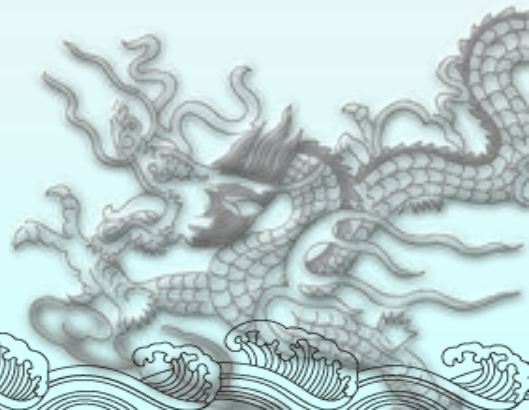


第五章二次曲线的一般理论



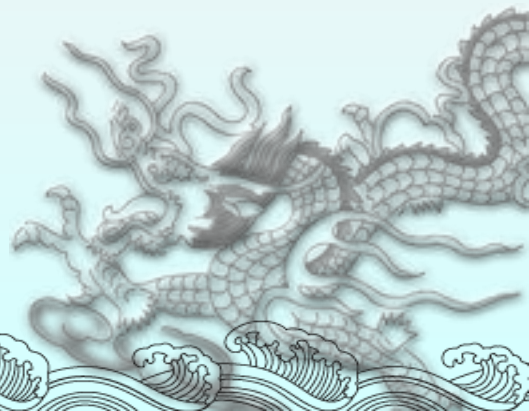
二次曲线的一般理论

在**平面**上，由二元二次方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

所表示的曲线，叫做二次曲线。

1. 二次曲线的几何性质；
2. 二次曲线的化简；
3. 二次曲线的分类。



为了方便起见，特引进一些记号：

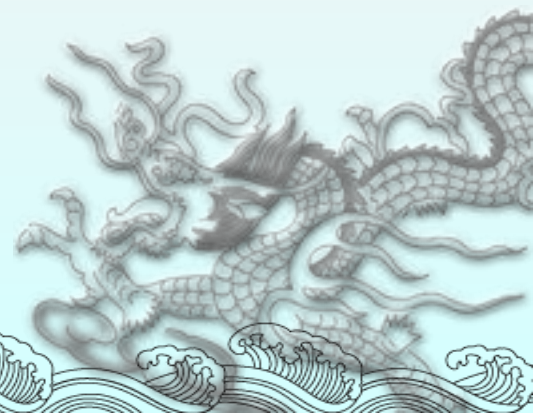
$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

$$F_1(x, y) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$

$$F_2(x, y) \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23}$$

$$F_3(x, y) \equiv a_{13}x + a_{23}y + a_{33}$$

$$\Phi(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

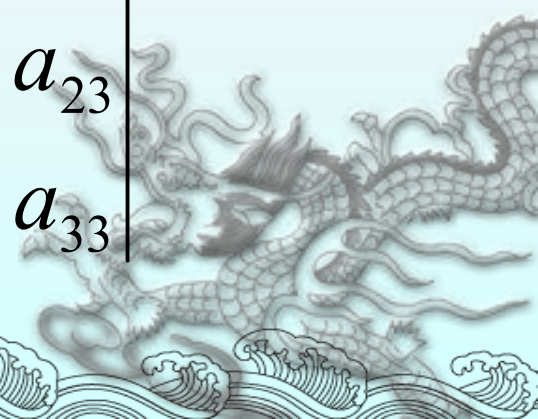
$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22}$$

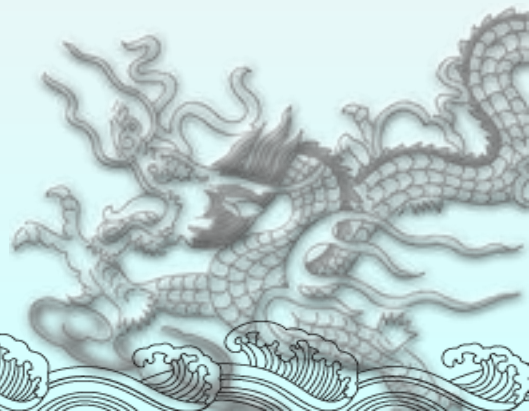
$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$



5.1 二次曲线与直线的相关位置



二次曲线与直线的相关位置

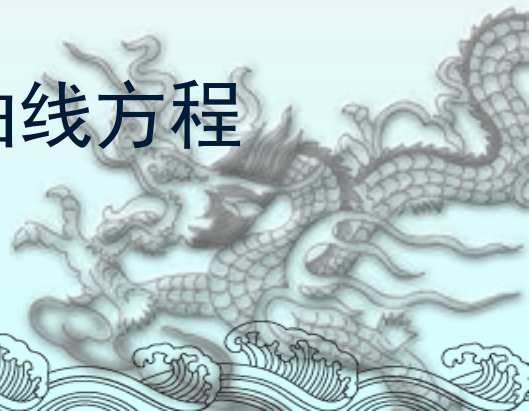
讨论二次曲线

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

与直线
$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \end{cases} \quad (2)$$

的交点.

可以采用把直线方程 (2) 代入曲线方程 (1), 然后讨论关于t的方程.



将(2)式代入(1)式整理得

$$\begin{aligned} & (a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2)t^2 + \\ & 2\{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})X + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})Y\}t + \quad (3) \\ & (a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}) = 0 \end{aligned}$$

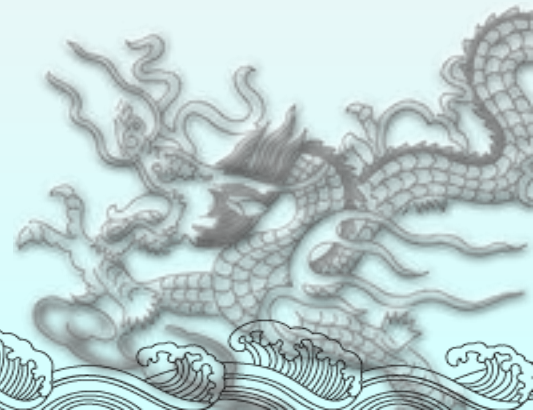
又根据

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

$$F_1(x, y) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$

$$F_2(x, y) \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23}$$

$$\Phi(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

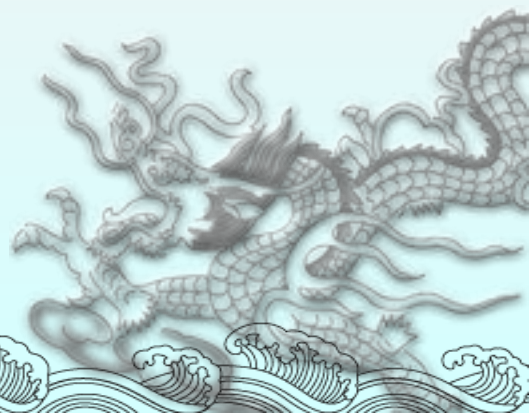


(3) 变换为 (4) 式

$$\Phi(X, Y) \cdot t^2 + 2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

(4)

对 (4) 式可分以下几种情况来讨论：



$$\Phi(X, Y) \cdot t^2 + 2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

1. $\Phi(X, Y) \neq 0$. 此时(4)是关于t的二次方程,

$$\Delta = 4[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]^2 - 4\Phi(X, Y) \cdot F(x_0, y_0)$$

1° $\Delta > 0$. 方程(4)有两个不等的实根 t_1 与 t_2 , 代入(2)得直线(2)与二次曲线(1)的两个不同的实交点.

2° $\Delta = 0$. 方程(4)有两个相等的实根 t_1 与 t_2 , 直线(2)与二次曲线(1)有两个相互重合的实交点.

$$\Phi(X, Y) \cdot t^2 + 2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

1. $\Phi(X, Y) \neq 0$. 此时(4)是关于 t 的二次方程,
 $\Delta = [F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]^2 - \Phi(X, Y) \cdot F(x_0, y_0)$

3° $\Delta < 0$. 方程(4)有两个共轭的虚根, 直线(2)与二次曲线交于两个共轭的虚点.



例题1：求二次曲线 $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ 与直线 $5x - y - 5 = 0$ 的交点。

解：由 $5x - y - 5 = 0$ 得 $y = 5x - 5$ ，代入二次曲线方程，得

$$x^2 - 2x(5x - 5) - 3(5x - 5)^2 - 4x - 6(5x - 5) + 3 = 0$$

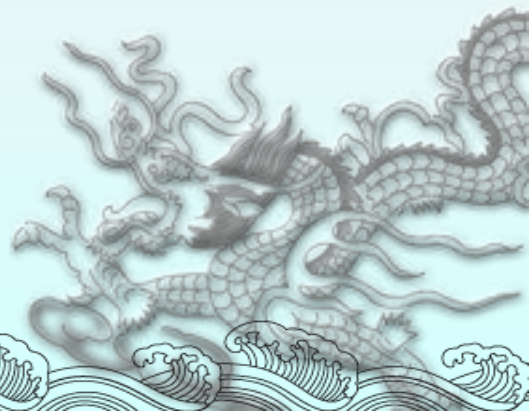
整理得 $-84x^2 + 126x - 42 = 0$

即： $2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow (2x - 1)(x - 1) = 0$

所以： $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 1$

所以 $y = -\frac{5}{2}$ 或 $y = 0$

所以二次曲线与直线的交点为 $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ 与 $(1, 0)$



例题 2 求二次曲线 $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ 与直线 $x + 4y - 1 = 0$ 的交点.

解: 直线方程可改写成

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \end{cases}$$

所以 $X = -4$, $Y = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

所以 $\Delta(X, Y) = 4^2 + 8 - 3 = 21$, $F_1(x_0, y_0) = -1$

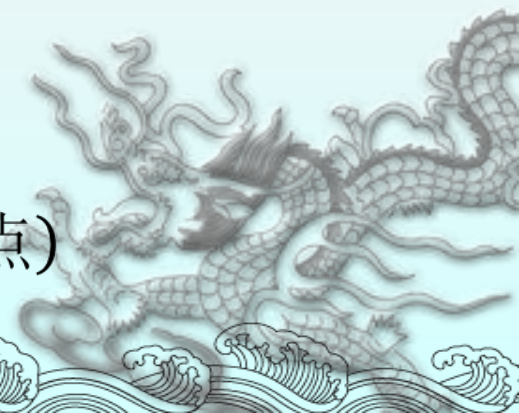
$$F_2(x_0, y_0) = -4, F(x_0, y_0) = 0$$

将直线方程代入二次曲线方程中, 得

$$21t^2 + 2(4 - 4)t + 0 = 0$$

即: $t = 0$ (二重根)

所以二次曲线与直线的交点为 $(1, 0)$, (二重交点)

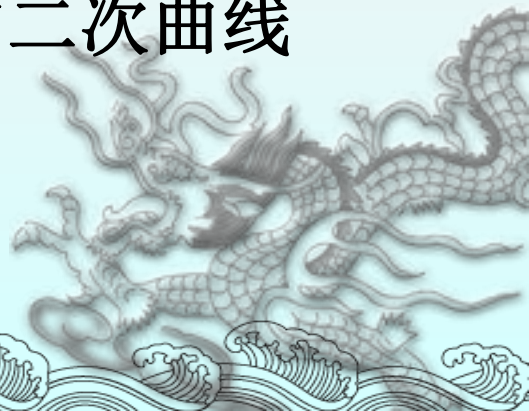


$$2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

2. $\Phi(X, Y) = 0$, 这时又可分三种情况:

1° $F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y \neq 0$. 此时 (4) 是关于 t 的一次方程, 直线 (2) 与二次曲线 (1) 有唯一实交点.

2° $F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y = 0$. 而 $F(x_0, y_0) \neq 0$. (4) 是矛盾方程, 直线 (2) 与二次曲线 (1) 无交点.



例题3: 求二次曲线 $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
与直线 $x - 3y = 0$ 的交点。

解: 直线方程可改写成

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = t \end{cases}$$

则 $X = 3$, $Y = 1$, $x_0 = y_0 = 0$

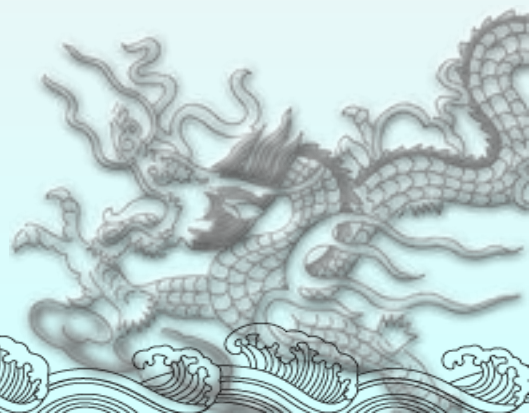
所以: $\emptyset(X, Y) = 0$, $F_1(x_0, y_0) = -2$, $F_2(x_0, y_0) = -3$, $F(x_0, y_0) = 3$

所以得方程

$$2(-6 - 3)t + 3 = 0$$

即: $t = \frac{1}{6}$

所以二次曲线与直线的交点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$



例题4：求二次曲线 $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ 与直线 $2x - 6y - 9 = 0$ 的交点。

解：直线方程可改写成

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -\frac{3}{2} + t \end{cases}$$

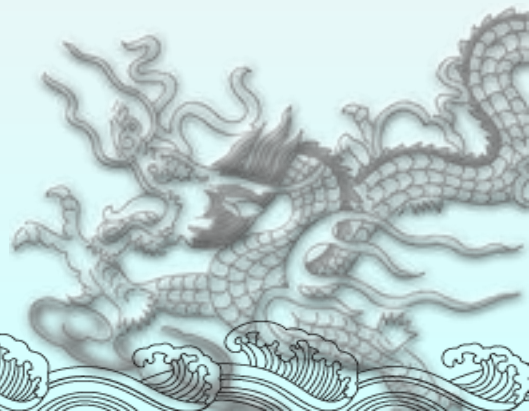
所以 $X = 3$, $Y = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{3}{2}$

所以： $\Delta(X, Y) = 0$, $F_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2}F_2(x_0, y_0) = \frac{3}{2}$, $F(x_0, y_0) = \frac{21}{4}$

$$2\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)t + \frac{21}{4} = 0$$

即： $\frac{21}{4} = 0$ 矛盾！

所以二次曲线与直线无交点。



$$2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0$$

2. $\Phi(X, Y) = 0$, 这时又可分三种情况:

$$3^\circ F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y = F(x_0, y_0) = 0.$$

此时 (4) 是恒等式, 直线 (2) 全部在二次曲线 (1) 上.



例题5: 求与直线 $x - y - 1 = 0$ 与二次曲线 $2x^2 - xy - y^2 - x - 2y - 1 = 0$ 的交点。

解: 直线方程可改写成

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \end{cases}$$

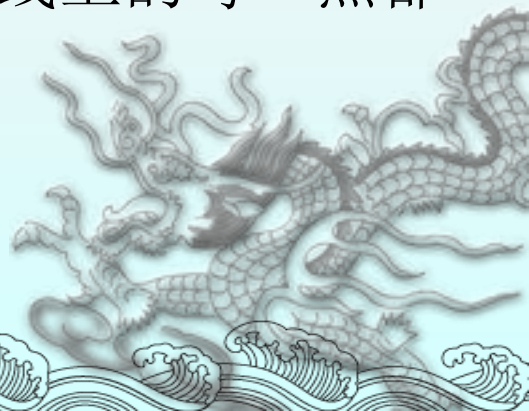
所以 $X = Y = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

所以: $\phi(X, Y) = 0$, $F_1(1, 0) = \frac{3}{2}$, $F_2(1, 0) = -\frac{3}{2}$, $F(1, 0) = 0$

所以得方程

$$0 = 0$$

此为恒等式。从而直线落在二次曲线上, 所以直线上的每一点都是直线与二次曲线的交点。



五、课堂小结

1. 当 $\Phi(X, Y) \neq 0$ 时 **直线与曲线的三种位置关系**;

2. 当 $\Phi(X, Y) = 0$ 时 **直线与曲线的三种位置关系**。



思考题：

$\Phi(X, Y)$ 与二次曲线的渐近方
之间的关系?

