第五章二次曲线的一般理论

二次曲线的一般理论

在**平面**上，由二元二次方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

所表示的曲线，叫做二次曲线。

1. 二次曲线的几何性质；
2. 二次曲线的化简；
3. 二次曲线的分类。

为了方便起见，特引进一些记号：

$$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$$

$$F_1(x,y)\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}$$

$$F_2(x,y)\equiv a_{12}x+a_{22}y+a_{23}$$

$$F_3(x,y)\equiv a_{13}x+a_{23}y+a_{33}$$

$$\Phi(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$K_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_1=a_{11}+a_{22}$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5.1二次曲线与直线的相关位置

二次曲线与直线的相关位置

讨论二次曲线

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

与直线

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \end{cases} \qquad (2)$$

的交点.

可以采用把直线方程（2）代入曲线方程（1），然后讨论关于t的方程.

将(2)式代入(1)式整理得

$$(a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2)t^2+$$

$$2\{(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})X+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})Y\}t+ \qquad (3)$$

$$(a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33})=0$$

又根据

$$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$$

$$F_1(x,y)\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}$$

$$F_2(x,y)\equiv a_{12}x+a_{22}y+a_{23}$$

$$\Phi(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

(3) 变换为 (4) 式

$$\Phi(X,Y)\cdot t^2 + 2\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X + F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]t + F(x_0,y_0) = 0 \tag{4}$$

对（4）式可分以下几种情况来讨论：

$$\boxed{\Phi(X,Y)\cdot t^2+2\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]t+F(x_0,y_0)=0}$$

1. $\Phi(X,Y)\neq 0.$ 此时(4)是关于t的二次方程,

$$\Delta=4\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]^2-4\Phi(X,Y)\cdot F(x_0,y_0)$$

1° $\Delta>0$. 方程(4)有两个不等的实根 t_1与t_2，代入(2)得直线(2)与二次曲线(1)的两个不同的实交点．

2° $\Delta=0$. 方程(4)有两个相等的实根 t_1与t_2，直线(2)与二次曲线(1)有两个相互重合的实交点.

$$\boxed{\begin{aligned}&\Phi(X,Y)\cdot t^2+2\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]t\\&+F(x_0,y_0)=0\end{aligned}}$$

1. $\Phi(X,Y)\neq 0$. 此时(4)是关于t的二次方程，

$$\Delta=\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]^2-\Phi(X,Y)\cdot F(x_0,y_0)$$

3° $\Delta<0$. 方程(4)有两个共轭的虚根，直 线(2)与二次曲线交于两个共轭 的虚点.

例题1：求二次曲线$x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$与直线$5x-y-5=0$的交点。

解：由$5x-y-5=0$得$\mathrm{y}=5\mathrm{x}-5$，代入二次曲线方程，得

$$x^2-2x(5x-5)-3(5x-5)^2-4x-6(5x-5)+3=0$$

整理得 $-84x^2+126x-42=0$

即：$2x^2-3x+1=0$ ➔ $(2x-1)(\mathrm{x}-1)=0$

所以：$x=\frac{1}{2}$或$x=1$

所以 $y=-\dfrac{5}{2}$或$y=0$

所以二次曲线与直线的交点为$\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$与$(1,0)$

例题2求二次曲线 $x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$与直线$x+4y-1=0$的交点.

解：直线方程可改写成

$$\begin{cases} x=1-4t \\ y=t \end{cases}$$

所以 $X=-4$，$Y=1$，$x_0=1$，$y_0=0$

所以$\emptyset(X,Y)=4^2+8-3=21$，$F_1(x_0,y_0)=-1$

$$F_2(x_0,y_0)=-4，F(x_0,y_0)=0$$

将直线方程代入二次曲线方程中，得

$$21t^2+2(4-4)t+0=0$$

即： $t=0$ (二重根)

所以二次曲线与直线的交点为(1,0)，(二重交点)

$$\boxed{2\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]t+F(x_0,y_0)=0}$$

2. $\Phi(X,Y)=0$，这时又可分三种情况：

1° $F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\neq 0$. 此时 (4)是关于 t的一次方程，直线 (2)与二次曲线 (1)有唯一实交点.

2° $F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y=0$. 而 $F(x_0,y_0)\neq 0$. (4)是矛盾方程，直线 (2)与二次曲线 (1)无交点.

例题3：求二次曲线$x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$与直线$x-3y=0$的交点。

解：直线方程可改写成

$$\begin{cases} x=3t \\ y=t \end{cases}$$

则 $X=3$，$Y=1$，$x_0=y_0=0$

所以:$\phi(X,Y)=0$，$F_1(x_0,y_0)=-2$，$F_2(x_0,y_0)=-3$，$F(x_0,y_0)=3$

所以得方程

$$2(-6-3)t+3=0$$

即：

$$t=\frac{1}{6}$$

所以二次曲线与直线的交点为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$

例题4：求二次曲线$x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$与直线$2x-6y-9=0$的交点。

解：直线方程可改写成

$$\begin{cases} x=3t \\ y=-\frac{3}{2}+t \end{cases}$$

所以 $X=3$，$Y=1$，$x_0=0$，$y_0=-\frac{3}{2}$

所以:$\emptyset(X,Y)=0$，$F_1(x_0,y_0)=-\frac{1}{2}F_2(x_0,y_0)=\frac{3}{2}$，$F(x_0,y_0)=\frac{21}{4}$

$$2\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)t+\frac{21}{4}=0$$

即：$\frac{21}{4}=0$ 矛盾！

所以二次曲线与直线无交点。

$$\boxed{2\left[F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y\right]t+F(x_0,y_0)=0}$$

2. $\Phi(X,Y)=0$，这时又可分三种情况：

3° $F_1(x_0,y_0)\cdot X+F_2(x_0,y_0)\cdot Y=F(x_0,y_0)=0.$

此时 (4)是恒等式 ，直线 (2)全部在二次曲线 (1)上.

例题5：求与直线$x-y-1=0$与二次曲线$2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$的交点。

解：直线方程可改写成

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$$

所以 $X=Y=1$，$x_0=1$，$y_0=0$

所以:$\emptyset(X,Y)=0$，$F_1(1,0)=\frac{3}{2}$，$F_2(1,0)=-\frac{3}{2}$，$F(1,0)=0$

所以得方程

$$0=0$$

此为恒等式。从而直线落在二次曲线上，所以直线上的每一点都是直线与二次曲线的交点。

五、课堂小结

1. 当$\Phi(X,Y)\neq 0$时,直线与曲线的三种位置关系;

2. 当$\Phi(X,Y)=0$时 直线与曲线的三种位置关系 。

思考题：

$\Phi(X,Y)$与二次曲线的渐近方向之间的关系?